

## TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES

### CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Para calcular el **máximo común divisor** de varios números seguimos los siguientes pasos:

- 1º. Descomponemos los números en factores primos
- 2º. Escogemos los factores **comunes**, elevados al **menor exponente**.
- 3º. El producto de estos factores es el máximo común divisor de los números.

Para calcular el **mínimo común múltiplo** de varios números seguimos los siguientes pasos:

- 1º. Descomponemos los números en factores primos
- 2º. Escogemos los factores **comunes** y **no comunes**, elevados al **mayor** exponente.
- 3º. El producto de estos factores es el mínimo común múltiplo de los números.

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{l}
 m.c.d.(30,12,18) \\
 \begin{array}{l}
 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
 12 = 2^2 \cdot 3 \\
 18 = 2 \cdot 3^2
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow \\
 m.c.d.(30,12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{l}
 m.c.m.(12,15,20) \\
 \begin{array}{l}
 12 = 2^2 \cdot 3 \\
 15 = 3 \cdot 5 \\
 20 = 2^2 \cdot 5
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow \\
 m.c.m.(12,15,20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los problemas de *m.c.d.* consisten en dividir en grupos varios tipos de elementos sin que sobre ninguno.

Ejemplo 3:

En una joyería tienen 96 brillantes de color rojo y 144 verdes. Con esos brillantes quieren hacer collares de un solo color y se quiere que tengan todos el mismo número de piedras. Si los collares deben tener el mayor número de brillantes posible y que no sobre ninguna piedra, ¿cuántos brillantes tienen que poner en cada collar?

Resolución:

$$96 = 2^5 \cdot 3 \quad 144 = 2^4 \cdot 3^2 \quad \Rightarrow \quad m.c.d.(96,144) = 2^4 \cdot 3 = 48$$

En cada collar hay que poner 48 brillantes.

Los problemas de m.c.m. consisten en encontrar el primer número que es múltiplo de varios números a la vez.

Ejemplo 4:

En una parada de autobuses coinciden dos líneas diferentes. Los autobuses de una de las líneas pasan cada 30 minutos y los de la otra, cada 24 minutos. Si han coincidido a las 12:00 horas, ¿cuál es la siguiente hora a la que volverán a coincidir?

Resolución:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad m.c.m.(30,24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Vuelven a coincidir al cabo de 120 minutos, es decir, a las 14:00 horas.

## EJERCICIOS

1. Calcula: a) m.c.m. (20, 24, 36)                      b) M.C.D. (48, 72, 84)
2. Un carpintero dispone de tres listones de madera de 40, 60 y 90 cm de longitud, respectivamente. Desea dividirlos en trozos iguales y de la mayor medida posible, sin que sobre madera. ¿Qué longitud deben tener esos trozos? Los cristales del instituto se limpian cada 9 semanas, los techos cada 12 y las estanterías de la biblioteca cada 6. ¿Cada cuántas semanas coincidirán las tres tareas?
3. Beatriz visita a su abuela cada 8 días, y su hermano David, cada 14 días. Hoy han coincidido en la visita. ¿Cuándo volverán a coincidir? ¿Cuántas visitas habrá hecho cada uno a su abuela? María tiene 120 libros y Pablo 160. Para facilitar la mudanza quieren meter sus libros en cajas lo más grandes posible, con el mismo número de libros y sin que se mezclen. ¿Cuántos libros contendrá cada caja?
4. En un albergue coinciden tres grupos de excursionistas de 40, 56 y 72 personas cada grupo. El camarero quiere organizar el comedor de forma que en cada mesa haya igual número de comensales y se reúna el mayor número de personas posible sin mezclar los grupos. ¿Cuántos comensales sentará en cada mesa?
5. Una rana corre dando saltos de 60 cm perseguida por un gato que da saltos de 90 cm. ¿Cada qué distancia coinciden las huellas del gato y las de la rana? En la panadería de la esquina hay napolitanas recién hechas cada 10 minutos, ensaimadas cada 14 minutos y rosquillas cada 28 minutos. Si a las 11 y cuarto de la mañana pude comprar un producto de cada uno, recién hechos, ¿a qué hora podré volver a repetir una compra igual?
6. Un electricista tiene tres rollos de cable de 96, 120 y 144 metros de longitud. Desea cortarlos en trozos iguales de la mayor longitud posible, sin que quede ningún trozo sobrante. ¿Qué longitud tendrá cada trozo? Una ONG tiene 48 envases de un medicamento A, 96 de otro B y 72 de otro C. Los quiere empaquetar en cajas que contengan la misma cantidad de cada uno de ellos y de forma que el número de

envases de cada caja sea el mayor posible. ¿Cómo puede hacerlo? ¿Cuántas cajas necesita para empaquetarlos?

**7.** ¿Cuál es la capacidad del menor depósito posible que puede llenarse con un número exacto de bidones de 12, 16 y 18 litros, respectivamente? Un albañil quiere dividir en habitaciones cuadradas una nave industrial de 48 metros de largo por 36 metros de ancho. ¿Cuánto puede medir de lado como máximo cada habitación? ¿Cuántas habitaciones habrá en tal caso?

**8.** Un granjero ha recogido de sus gallinas 30 huevos morenos y 48 huevos blancos. Quiere envasarlos en recipientes con la mayor capacidad posible y con el mismo número de huevos (sin mezclar los blancos con los morenos). ¿Cuántos huevos debe poner en cada recipiente? Se desea cuadrricular una cartulina, de manera que el lado del cuadrado que forma la cuadrícula sea lo mayor posible. La cartulina mide 30 cm de ancho y 45 de largo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado?

**9.** Un cometa es visible desde la tierra cada 16 años, y otro, cada 24 años. El último año que fueron visibles conjuntamente fue en 1968. ¿En qué año volverán a coincidir? Luis va a clase de música cada 3 días, y practica natación cada 5 días. ¿Cada cuántos días le coinciden las dos actividades?

**10.** El dependiente de una papelería tiene que organizar en botes 36 bolígrafos rojos, 60 bolígrafos azules y 48 bolígrafos negros, de forma que en cada bote haya el mayor número de bolígrafos posible y todos tengan el mismo número sin mezclar los colores. ¿Cuántos pondrá en cada bote?

**11.** Un cine tiene un número de asientos comprendido entre 200 y 250. Sabemos que el número de entradas vendidas para completar el aforo es múltiplo de 4, de 6 y de 10. ¿Cuántos asientos tiene el cine?

## POTENCIAS Y RAÍCES

### Propiedades de las potencias:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad 2^3 \cdot 2^5 = 2^8$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad 2^8 : 2^3 = 2^5$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (2^4)^3 = 2^{12}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (7 \cdot 2)^3 = 7^3 \cdot 2^3$$

$$(a : b)^m = a^m : b^m \qquad (7 : 2)^3 = 7^3 : 2^3$$

$$a^0 = 1 \qquad 7^0 = 1$$

### EJERCICIOS

1. Escribe como una sola potencia:

a)  $2^7 \cdot 2^5 : 2^7$       b)  $3^8 : 3^3 \cdot 3^2$       c)  $6^7 \cdot 2^7 \cdot 5^7$       d)  $81^3 : 9^3 : 3^3$

e)  $(2^3)^5 \cdot 2^4$       f)  $(3^6)^3 : 3^8$       g)  $8^8 : (8^4)^2$       h)  $(5^5)^2 \cdot (5^2)^3$

i)  $(100^7)^8 : 100^{56}$       j)  $(4^{15} \cdot 4^5) : (4^6 : 4^3)$       k)  $3^{10} : [(3^2)^5 : 3^3] \cdot 3$

2. Reduce estas expresiones:

a)  $3 \cdot (3 \cdot 2)^3$       b)  $(7^6 : 7^4) \cdot (7 \cdot 2)^5$       c)  $4^7 \cdot (4^6 : 4^4) \cdot (7 \cdot 4)^5 : 7^5$

d)  $(5 \cdot 9)^{12} : (9 \cdot 5)^5 \cdot 9^7$       e)  $(2^6 \cdot 2^4) : 2^5$       f)  $(5^2)^3 \cdot 25^3$

g)  $36^3 \cdot 6^8 : 6^6$       h)  $(9^4)^2 : (3^2)^5$       i)  $3^5 \cdot (3^{10} : 3^8)$       j)  $\frac{7^{10} \cdot 7^4}{7^6}$

k)  $9^4 \cdot 9^3 \cdot (3^2)^7$       l)  $\frac{4^{20} : 4^{14}}{4^3 \cdot 2^4}$       m)  $(27^3 \cdot 9^2)^5$  n)  $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$

ñ)  $9^{10} \cdot 2^{10} : 18^3$       o)  $\frac{10^8}{2^8}$       p)  $\frac{49^8}{7^8} \cdot 2^8$

## OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS NATURALES

### Prioridad de operaciones:

Primero: se efectúan las operaciones entre **paréntesis, corchetes y llaves**.

Segundo: se efectúan las **potencias y raíces** (en el orden que aparezcan de izquierda a derecha)

Tercero: se efectúan **las multiplicaciones y divisiones** (en el orden que aparezcan de izquierda a derecha)

Cuarto: se realizan **las sumas y las restas**.

### Ejemplo 1:

$$5 \cdot [(8^2 - 60) - 6^0 + \sqrt{81} : (2+1) \cdot 4] \quad \text{Se efectúa la potencia del paréntesis ( )}$$

$$5 \cdot [(64 - 60) - 6^0 + \sqrt{81} : (2+1) \cdot 4] \quad \text{Se efectúan las operaciones de los paréntesis ( )}$$

$$5 \cdot [4 - 6^0 + \sqrt{81} : 3 \cdot 4] \quad \text{Se trabaja con [ ] y se resuelve potencia y raíz}$$

$$5 \cdot [4 - 1 + 9 : 3 \cdot 4] \quad \text{Se resuelve la división y multiplicación}$$

$$5 \cdot [4 - 1 + 12] \quad \text{Se resuelve resta y suma}$$

$$5 \cdot 15 \quad \text{Se resuelve la multiplicación}$$

$$75 \quad \text{Resultado final}$$

## EJERCICIOS

3. Realiza las siguientes operaciones:

a)  $2 \cdot 3^2 + 5^2 - 6$       b)  $4^2 - (2^3 + 1)$       c)  $3^2 + 5(8 - 6)$       d)  $2^3(\sqrt{25} - 2 - 1)$

e)  $15 + 2^3(7 - 5) - \sqrt{36} : (8 - 2)$       f)  $12 + 6 \cdot 2^2 : 3 - 5 + \sqrt{25} \cdot 3$

g)  $12 + \sqrt{16}[8 - (5 - 3) \cdot 2] + 2^3$       h)  $13 - (4 + 2)^2 : \sqrt{16} + 5 \cdot (7 - 4)^3 + 2^3$

i)  $\sqrt{81} + \sqrt{25} : (2^3 - 3)$       j)  $6^2 : (\sqrt{49} - 1) - 2^0$       k)  $4^2 - 5 : (4 + 5^0)$

l)  $10 - 22 : \sqrt{121} + 5 \cdot (7 - 4) - 2^3$       m)  $2 + 4 \cdot 3^2 - 4^3 \cdot 3$       n)  $(15 - \sqrt{9}) : \sqrt{144}$

ñ)  $(\sqrt{49} - 4) + (1 + \sqrt{81}) \cdot \sqrt{4}$       o)  $(\sqrt{25} + 3 \cdot 5) : 5 + 3^0$

p)  $19 + \sqrt{9} \cdot 3 + 3(\sqrt{9} : 3 - 1)$       q)  $3^3 : [(\sqrt{625} - 5^2) + 3^2]$

r)  $[9 + 16 - 4 \cdot 3 + 5] : \sqrt{9} + 2^3 : 2$       s)  $(4 - \sqrt{18 - 14})^2 + \sqrt{8 + (8 - 14 : 2)^2}$

t)  $12 - 48 : [36 - 2 \cdot (14 - 2)]$       u)  $(12 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}) : 2$