TEMA 10. FUNCIONES

¿Qué son?

Es una correspondencia (relación) entre dos variables de manera que a cada valor de la primera (variable independiente) **x** le corresponde un único valor de la segunda (variable dependiente) y (y= **f(x)**)

Elementos

- **Variable independiente**
- **Variable dependiente**

¿Cómo se representan?

- **Expresión Analítica (Formula)**
- **Tabla de valores (x,f(x))**
- **Representación Gráfica**

Características:

- **Dominio y Recorrido.**
- **Puntos de Corte con los ejes.**
- **Continuidad**
- **Crecimiento y Decrecimiento.**
- **Máximos y mínimos**.

Funciones Lineales o Afines.: $y = mx + n$

$m:$ *pendiente* $n:$ *ordenada en el origen*

$m > 0 \Rightarrow$ *Funcion Creciente*

$m < 0 \Rightarrow$ *Función Decreciente*

Función de Proporcionalidad directa: $y = mx$

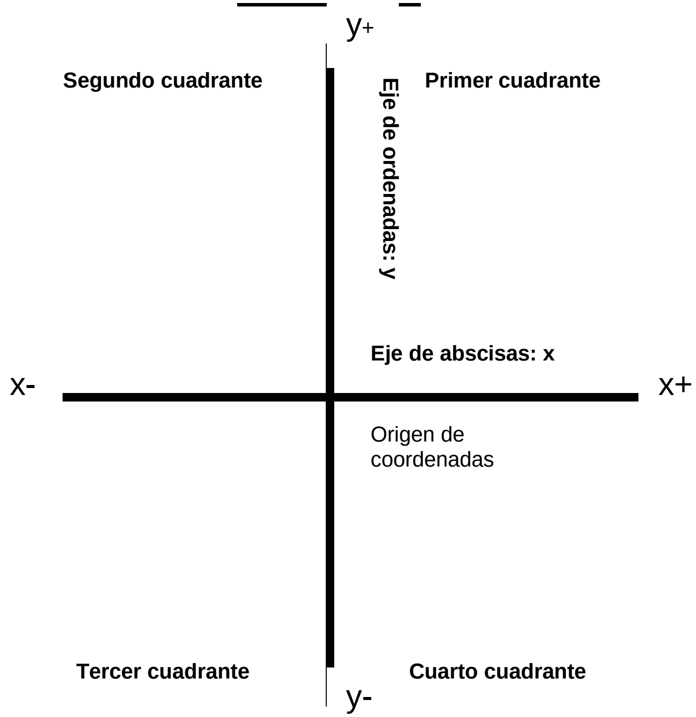
(Todas ellas pasan por el Origen de Coordenadas)

Funciones constantes: $y = n$.

(Rectas paralelas al eje de abscisas)

¿Dónde se representan?

Sistema de ejes Coordenados Cartesianos



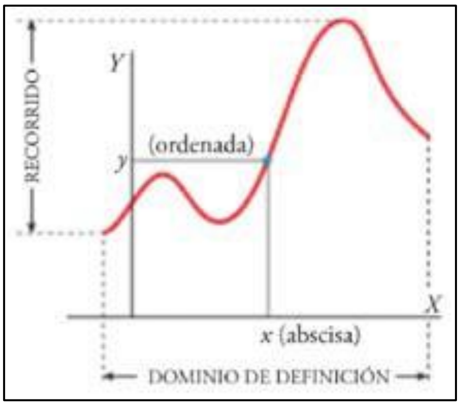
TEMA 10: FUNCIONES

FUNCIONES

Una **función** es una relación entre dos variables de forma que a cada valor de la **variable independiente "x"** le corresponde un **único valor** de la **variable dependiente *y*.** Se dice "y" es función de "***x"*.**

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente **x**.

El conjunto **imagen o recorrido** de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente ***y***.



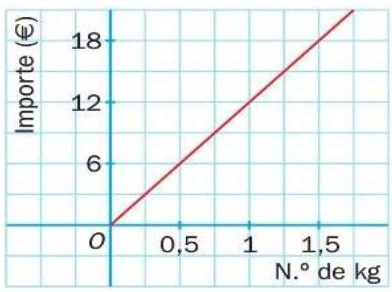
Enunciado

A cada cantidad se le asocia su coste (1 kilo son 12 euros).

Tabla

Número de kilogramos	Importe (€)
0,5	6,00
0,8	9,60
1	12,00
1,5	18,00

Gráfica



Fórmula

$y = 12x$

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica:
Sobre unos ejes cartesianos representamos las dos variables:

La x (**variable independiente**) sobre el eje horizontal (eje de abscisas).
La y (**variable dependiente**) sobre el eje vertical (eje de ordenadas).

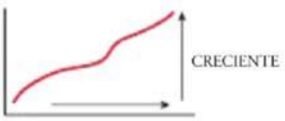
Los puntos P(x,y), de la gráfica, para los cuales x>0 e y>0, pertenecen al **primer cuadrante**. Los pertenecientes al **segundo cuadrante** verifican que x<0 e y>0, los del **tercer cuadrante** x<0 e y<0 y finalmente los del **cuarto cuadrante** x>0 e y<0.

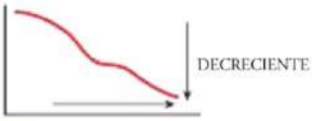
Los **puntos de corte con el eje de abscisas** son de la forma (x,0) que cumplen que f(x)=0
Los **puntos de corte con el eje de ordenadas** son de la forma (0,y) donde y=f(0)

CARACTERISTICAS DE LAS FUNCIONES

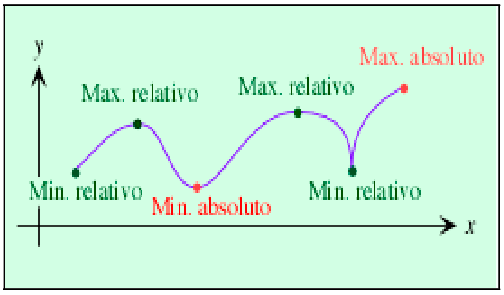
Una función es **creciente** cuando al aumentar los valores de la variable independiente, "x", también aumenta los valores de la variable dependiente, "y". Una función es **decreciente** cuando al aumentar los valores de "x", disminuyen los de "y". Una función es **constante** cuando al aumentar la "x", se mantiene constante la "y".
Para estudiar las variaciones de una función hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha, es decir, hemos de ver cómo varía la "y" cuando "x" aumenta.

.





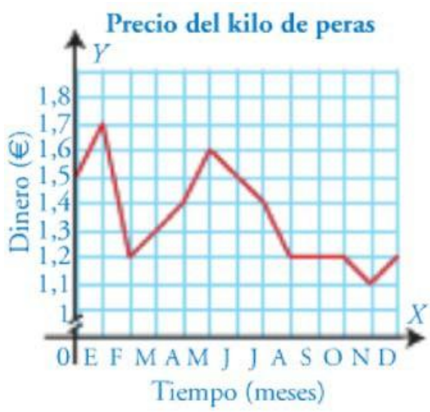
Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando pasa de ser creciente a ser decreciente en dicho punto; podemos decir también, que su ordenada es mayor o igual que la ordenada de los puntos que lo rodean, tendrá un **máximo absoluto** en un punto cuando su ordenada es mayor o igual que la ordenada de todos los puntos del dominio. Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando pasa de ser decreciente a ser creciente en dicho punto; podemos decir también, que su ordenada es menor o igual que la de los puntos que lo rodean., tendrá un **mínimo absoluto** en un punto cuando su ordenada es menor o igual que la ordenada de todos los puntos del dominio.
Una función es **continua** si su grafica no presenta saltos o interrupciones, los puntos en los que presenta saltos o interrupciones se denominan **puntos de discontinuidad**



Ejemplo 1: En la gráfica del margen se representa la evolución del precio del kilo de peras en el último año.

La variable independiente x es el tiempo expresado en meses.
La variable dependiente "y" es el precio de un Kilo de peras expresado en euros.

El dominio son todos los meses de un año determinado.
La imagen o recorrido es de 1,10 € a 1,70 €
A finales de enero obtenemos el precio máximo relativo y absoluto de 1,70 €
A finales de mayo hay el precio máximo relativo pero no absoluto siendo el precio de 1,60 €
A finales de noviembre obtenemos el precio mínimo relativo y absoluto siendo el precio de 1,10 €
A finales de febrero hay el precio mínimo relativo pero no absoluto siendo el precio de 1,20 €
En el intervalo de tiempo de finales de mayo hasta finales de agosto el precio es decreciente.



EXPRESION ANALITICA DE UNA FUNCION

Una función se expresa a través de una **fórmula** o **expresión analítica** cuando se da una ecuación que relaciona algebraicamente la variable dependiente " y " con la independiente " x ": $y = f(x)$

Ejemplo 1: Halla la expresión algebraica o analítica de la función que relaciona el lado de un cuadrado "x" (variable independiente) con su área A (variable dependiente).

Solución: $A = x^2$

Ejemplo 2: Halla la expresión algebraica o analítica de la función que relaciona el lado de un cuadrado "x" (variable independiente) con su perímetro P (variable dependiente).

Solución: $P = 4x$

Ejemplo 3: Halla la expresión algebraica o analítica de la función que relaciona la base de un rectángulo "x" (variable independiente) con su Área A (variable dependiente) sabiendo que su perímetro es 80 cm.

Solución: $A = x \cdot (40 - x)$ pues si la base es "x" la altura es "40-x" para que el perímetro sea 80

Ejemplo 4: El coste de utilización de internet es de 15 € fijos más 0,5 € por hora. Halla la expresión analítica de la función que relaciona las horas transcurridas "t" (variable independiente) con su Coste C (variable dependiente).

Solución: $C = 0{,}5 \cdot t + 15$

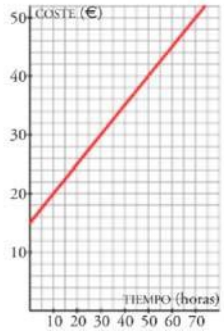
La expresión analítica tiene **dos grandes ventajas** sobre la representación gráfica:

- Resulta muy cómodo y breve dar la función de este modo.
- Con ella se pueden obtener, con toda precisión, los valores de la función a partir de la variable independiente.

y un **inconveniente:**

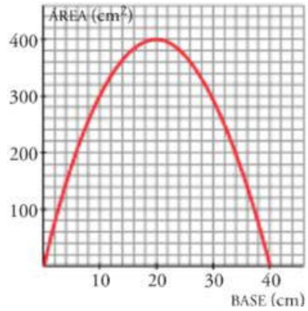
- La fórmula nos dice poco sobre el comportamiento de la función: dominio, recorrido, máximos, mínimos, etc. Hay que efectuar cálculos y representarla para ver cómo se comporta globalmente.

Ejemplo 1: Haz la gráfica de la función $C = 0.5 \cdot t + 15$ obtenida en el ejemplo 4 anterior, donde relacionábamos las horas (t) con el coste (C) hallando previamente algunos puntos de la gráfica. ¿Qué forma tiene? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido? ¿Es continua? ¿Cuándo es creciente o decreciente? ¿Qué Interpretación podemos darle al número 0,5?, ¿y al 15?.
¿Cuándo pagamos 20 €? ¿Cuándo pagamos 28,20 €?



Solución: La gráfica pasa, por ejemplo, por los puntos (0,15) ; (1, 0.5) ; (10, 20) y (50, 40).Tiene forma de recta (estudiaremos con detalle este tipo de funciones en el siguiente apartado).
El dominio son los números "t" mayores de cero. El recorrido son los números "C" mayores que 15.
Es continua y creciente en su dominio.
El número 0,5 es lo que pagamos por hora. El número 15 es lo que pagamos por empezar a utilizar el servicio.
Pagamos 20 € cuando t=10 h (se halla resolviendo la ecuación $0.5t + 15 = 20$)
Pagamos 28,20 € cuando t=26,4 h= 26h 24 min (se halla resolviendo la ecuación $0.5t + 15 = 28{,}2$)

Ejemplo 2: Haz la gráfica de la función $A = x \cdot (40 - x)$ obtenida en el ejemplo 3 anterior, donde relacionábamos la base de un rectángulo, "x", con su área "A" sabiendo que su perímetro era 80 cm, hallando previamente algunos puntos de la gráfica. ¿Qué forma tiene? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido? ¿Es continua? ¿Cuándo es creciente o decreciente? ¿Cuándo el área es máxima y qué vale? ¿Cuándo el área es mínima y qué vale?¿Cuándo el área es 300 cm^2? ¿Cuándo el área es 400 cm^2? ¿Cuándo el área es 500 cm^2?



Solución: La gráfica pasa, por ejemplo, por los puntos (0,0) ; (10, 300) ; (15, 375) ; (20, 400) ; (25,375) ; (30,300) ; (40,0). Tiene forma de parábola (se estudiará este tipo de funciones y gráficas el próximo curso)
El dominio son los números "x" entre 0 y 40. El recorrido son los números "A" entre 0 y 400.
Es continua en su dominio. Es creciente para "x" entre 0 y 20. Es decreciente para "x" entre 20 y 40. El área es máxima cuando x=20 cm siendo entonces el área de 400 cm^2. El área es mínima cuando x=0 cm o x=40 cm siendo entonces el área de 0 cm^2
El área es 200 cm^2 cuando x=10 cm^2 o cuando x=30 cm^2 (se halla resolviendo la ecuación $200 = x \cdot (40 - x)$)
El área es 400 cm^2 cuando x=20 cm^2 (se halla resolviendo la ecuación $400 = x \cdot (40 - x)$ o analizando la gráfica)
El área nunca es 500 cm^2 (se halla resolviendo la ecuación $500 = x \cdot (40 - x)$ o analizando la gráfica)

FUNCIONES LINEALES

La función se llama **lineal o afín** si tiene por ecuación $y = mx + n$ *(ecuación explícita de la recta).*

* Su gráfica es una **recta** que pasa por (0, n). **"n"** es, por tanto, la **ordenada en el origen**.
* El punto de corte con el eje de abscisas es el punto (x,0), siendo "x" la solución de la ecuación mx+n=0
* Si n=0, $\boldsymbol{y = mx}$. Pasa por el origen y se denomina **función de proporcionalidad directa**.
* El coeficiente de "x", "**m**", se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con la inclinación de la recta. Cuando la función es $y = mx$, m es la constante de proporcionalidad entre "x" e "y".
* Si $\boldsymbol{m > 0}$, la función es creciente. Por cada unidad que aumenta "x", la "y" aumenta "m" unidades.
* Si $\boldsymbol{m} < 0$, la función es decreciente. Por cada unidad que aumenta "x", la "y" disminuye "m" unidades.
* $y = n$ se denomina función **constante,** la recta es horizontal y pasa por el punto (0,n)

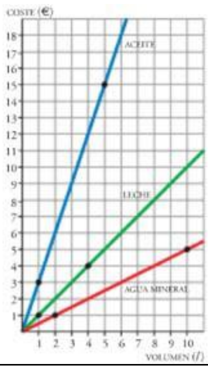
Ejemplo 1: Halla la función que asocia los litros de un producto (x) con el coste (y) en euros en los casos siguientes. Haz también su gráfica e interpreta el significado de las pendientes de la recta:

a) El precio de 1 litro de leche es de 1 €.
b) El precio de 1 litro de aceite es de 3 €.
c) El precio de 1 litro de agua mineral es de 0,5 €.

Solución:

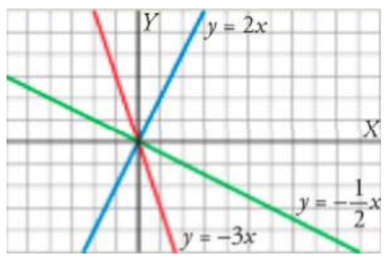
a) y=x
b) y=3x
c) y=0,5x

La pendiente nos dice el precio por litro de cada producto



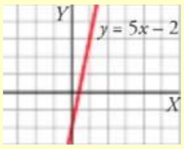
Ejemplo 2: Representa las funciones proporcionales, halla las pendientes e interprétalas:

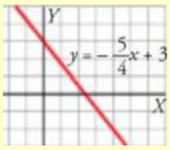
$a) \quad y = 2x \qquad b) y = -(1/2)x \qquad c) \quad y = -3x$

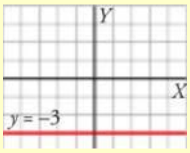


Solución:
La recta a) es creciente y su pendiente es 2, las rectas b) y c) son decrecientes y tienen pendientes –1/2 y –3, respectivamente.
La recta a): por cada unidad que aumenta "x", la "y" aumenta 2 unidades.
La recta b): por cada unidad que aumenta "x", la "y" disminuye 3 unidades.
La recta c): por cada unidad que aumenta "x", la "y" disminuye 0,5 unidades.
Si comparamos las dos rectas decrecientes (b y c), la recta más parecida a la vertical es la c) porque su pendiente es |m|= |-3|=3 mayor que la pendiente en b) |m|=|–1/2|=1/2

Ejemplo 3: Representa las funciones lineales: a) $y = 5x - 2$ b) $y = -5/4x + 3$ c) $y = -3$

Solución: a) 

b) 

c) 

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LINEALES

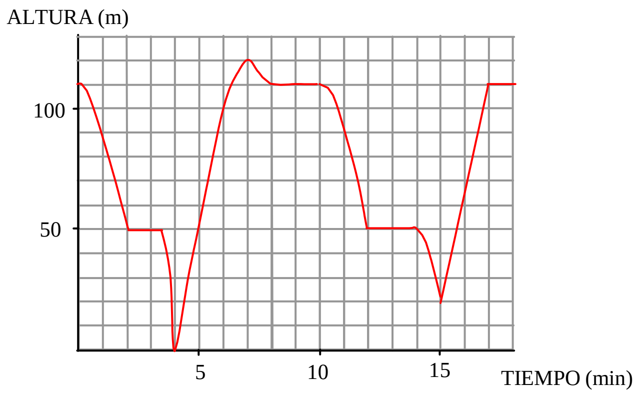
En multitud de fenómenos, intervienen dos magnitudes que se relacionan mediante una función lineal, por ejemplo:

* Peso de un alimento (x) y el coste de éste (y)
* Tiempo (x) y la distancia recorrida (y) si lleva una velocidad constante.

Si tenemos dos rectas y tenemos que hallar el **punto de corte** de ellas, resolveremos el **sistema** formado por las dos ecuaciones de dichas rectas.

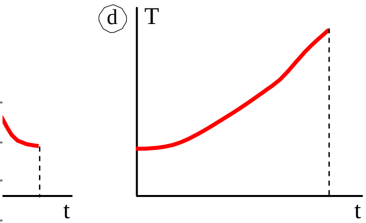
EJERCICIOS

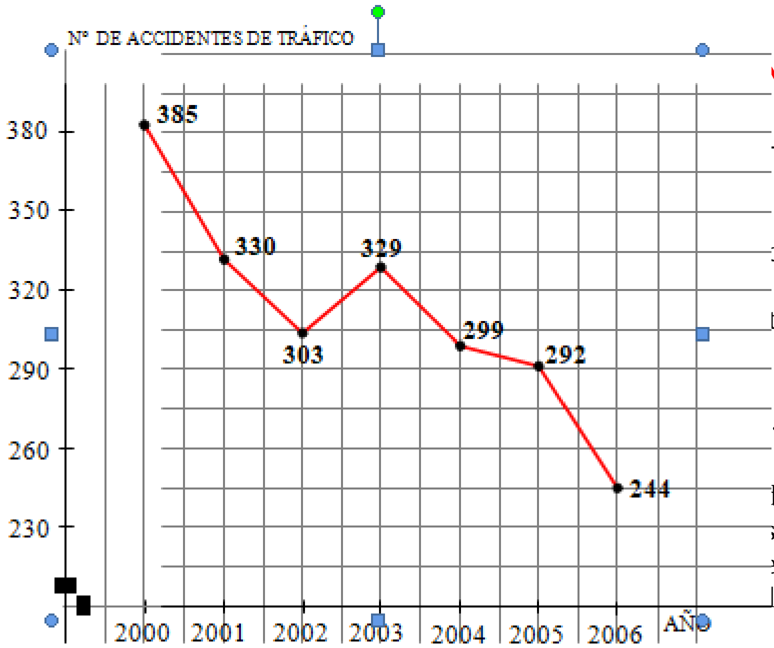
1.- **Un equipo** de naturalistas ha observado un águila: "*Sale del nido, caza un conejo, vuelve al nido, vuelve a salir, caza una paloma y, de nuevo vuelve al nido*" y han hecho la gráfica siguiente. Obsérvala atentamente y responde:



a) ¿Cuáles son las variables que intervienen? ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
b) ¿Qué escala se ha utilizado para cada variable?
c) ¿Cuál es el dominio y el recorrido?
d) ¿A qué altura se encuentra el nido?
e) ¿A qué altura estaba el águila a los seis minutos de empezar la observación?
f) ¿Desde qué altura estaba para buscar caza?
g) ¿En qué instante caza el conejo?
h) ¿Cuánto tiempo pasa en el nido con su pareja y los pollitos después de cazar el conejo?
i) ¿A qué altura volaba la paloma que caza?
j) Desde que caza la paloma, ¿cuánto tarda en subir al nido? Encuentra la velocidad de subida en metros por minuto.

2.- **Estas cuatro gráficas** representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:





a ila la temperatura en menor medida?

b tra, a una ciudad de nuestras antípodas.

¿

c .

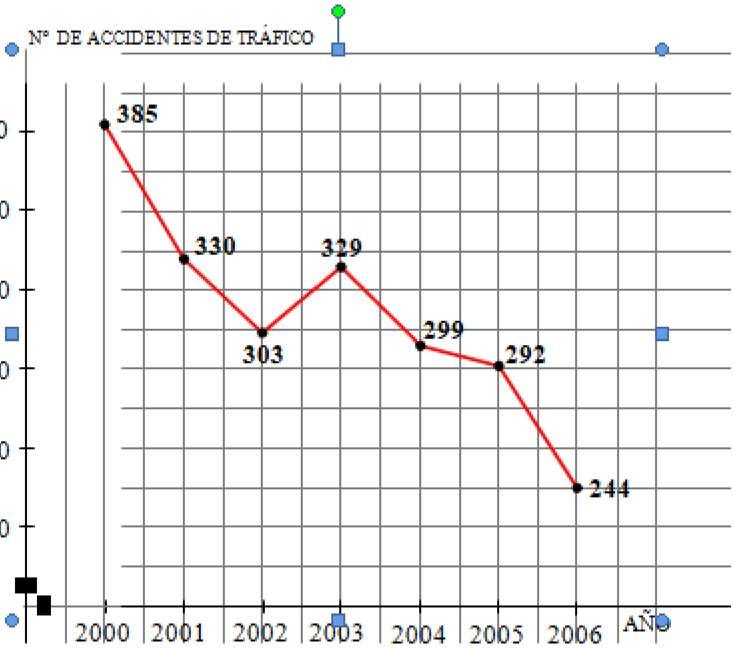
3 los en los últimos años en una cierta población:

a se número?

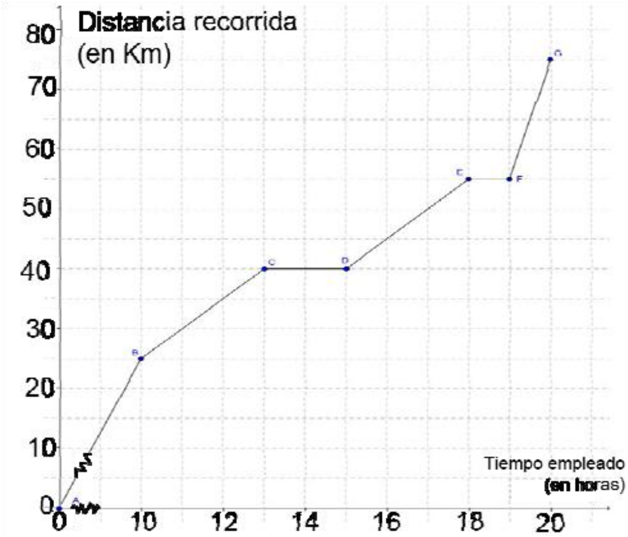
b ese número?

c lurante los años reflejados en la gráfica.

.

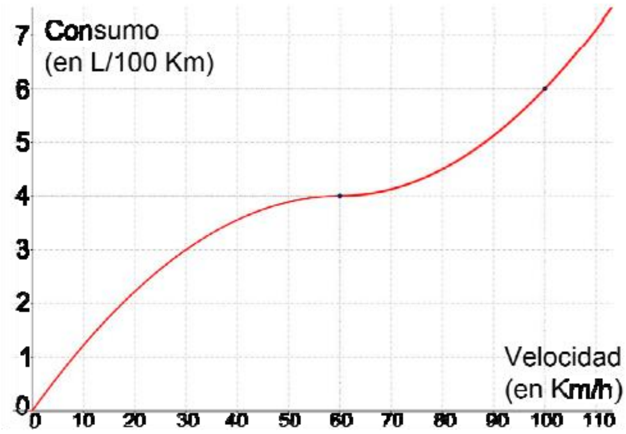


4.-La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra :



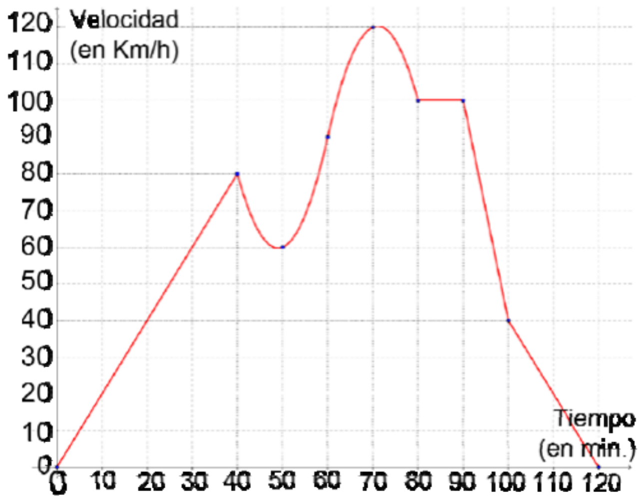
a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión,
f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida", ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

5.-El consumo de gasolina de un coche Por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.



a) ¿Cuál es la variable dependiente?
b) ¿Y la independiente?
c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 50 km/h?
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 5 L/100 km?
e) Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

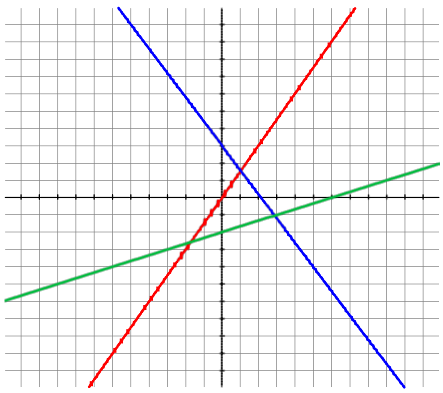
6.-Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico...
La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.
a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?
e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?
f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?



7.- Representa las funciones siguientes e indica cuál es su pendiente:

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = -2x$
e) $y = \frac{1}{3}x$

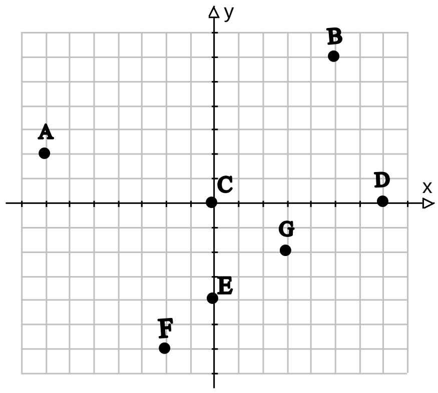
8.-Encuentra la pendiente y la ecuación de las rectas siguientes:



9. Dado el siguiente sistema de ejes de coordenadas:

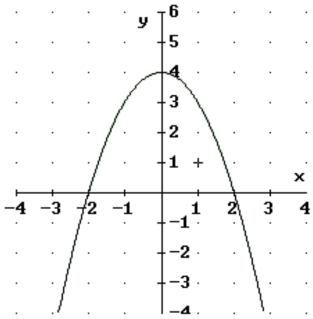
a) Escribe las coordenadas de los puntos representados:

Ejemplo: A(–7, 2)



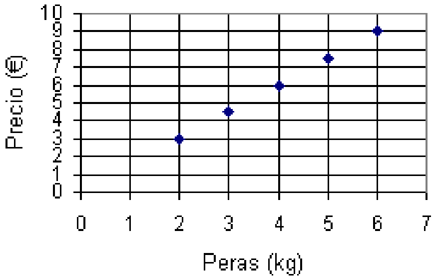
b) Representa los puntos: P(2,3); Q(–5,6); R(–4,0); S(0,4); T(2, –3); U(–6, –8)

10. Observa la gráfica y determina:
a) Intervalo de crecimiento.
b) Intervalo de decrecimiento.
c) Máximos.
d) Mínimos.



11. Observa la gráfica y responde:

a) ¿Cuánto cuesta el kilo de peras?
b) ¿La gráfica total es discreta o continua?



12. El gráfico representa la evolución de precios de las acciones de una cierta empresa en una semana. ¿Qué afirmación es verdadera?

a) El valor máximo alcanzado ha sido de 2’8 €.
b) El valor mínimo se alcanzó en los días 4 y 6.
c) El precio creció el día 3 y el día 4.
d) El precio máximo se alcanzó el día 3.

13. Estudia la función que relaciona la cantidad de naranjas compradas al precio de 60 céntimos el kg y el importe de la compra en euros ($y = 0'60 \cdot x$).
a) ¿Es de proporcionalidad directa?
b) Haz una tabla para x = 0, 1, 2, 3, 4, 5
c) Representa los puntos de la tabla.
d) ¿Se pueden unir los puntos?
e) ¿Puede tomar la x valores negativos?

14. Representa la función $y = -2x$ e indica si es creciente o decreciente.

15. Una cierta función está definida por: "a cada número le hace corresponder el que resulta de obtener sus tres cuartas partes y luego sumarle dos".
a) Escribe su expresión algebraica.
b) Represéntala.
c) ¿Es de proporcionalidad directa?

16. Observa la gráfica y responde:
a) ¿Es una función de proporcionalidad directa?
b) ¿Qué ordenada corresponden a $x = -2$?
c) ¿Qué ordenada corresponden a $x = 4$?