TEMA 3: DIVISIBILIDAD

DIVISIBILIDAD

Existe relación de DIVISIBILIDAD entre dos números cuando su división es exacta.

MÚLTIPLOS

Un número es MÚLTIPLO de otro cuando es el resultado de multiplicar el segundo número por cualquier número natural.

12 es MÚLTIPLO de 4 porque 4 x 3 = 12

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m) de 2 o más números

Es el menor de sus múltiplos comunes.

Se calcula realizando el producto de los factores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Son reglas que nos permiten reconocer si un número es divisible por otro sin hacer la división.

2	Termina en, 0 o cifra par: 2, 4, 6, 8.
3	La suma de los valores de sus cifras es divisible entre 3.
5	Termina en 0 o en 5.
11	La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan el lugar par y la suma de las cifras que ocupan el lugar impar es 0 o múltiplo de 11.
Para comprobar si un nº es divisible entre 7 o 13 realizamos la división. Es más práctico que aplicar el criterio de divisibilidad.	

DIVISORES

Un número es DIVISOR o FACTOR de otro cuando la división del segundo por el primero es exacta.

4 es DIVISOR de 12 porque 12 : 4 = 3

Máximo Común Divisor (m.c.d.) de 2 o más números

Es el mayor de los divisores comunes.

Se calcula realizando el producto de los factores primos comunes, elevados al menor exponente.

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO COMPUESTO EN FACTORES PRIMOS (FACTORIZAR)

NÚMERO PRIMO

Sólo tiene dos divisores: el propio número y el 1.

NÚMERO COMPUESTO

Tiene más de dos divisores.

RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

Un número es divisible por otro cuando la división entre ellos es exacta; es decir, su resto es 0.

Si $D = d \cdot c$ y $r = 0$, decimos que *D* es divisible por *d*, o que *D* contiene un número exacto de veces a *d*.
En este caso, decimos que entre D y d existe una <u>relación de divisibilidad</u>.

<u>Ejemplo</u>: Entre 104 y 8 existe relación de divisibilidad. 104 es divisible por 8. 104 contiene 13 veces a 8

1. Comprueba si existe relación de divisibilidad entre estos números:

a) 918 y 54 b) 224 y 40 c) 400 y 16

2. ¿Cuál de los siguientes números está contenido un número exacto de veces en 288?

a) 16 b) 24 c) 20

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Un número **b** es múltiplo de otro número **a** si la división de **b** entre **a** es exacta.
Los múltiplos de un número se obtienen *multiplicando* ese número por cualquier número natural.
Por eso, un número tiene <u>infinitos múltiplos</u>, que serán mayores o iguales que ese número. Además, cualquier número es múltiplo de sí mismo y de la unidad

<u>Ejemplo:</u> Los múltiplos de 5 son: $\dot{5}: 5, 10, 15, 20,...$

3. Completa en tu cuaderno.

a) Como $36:4$ es una división exacta, entonces 36 es ……….. de 4
b) Como $45:9$ es …… ………. ………, entonces 45 es múltiplo de 9
c) Como $51:18$ no es …… ………. ………entonces 51 no es ……….. de 18

4. Escribe los seis primeros múltiplos de 12
5. Razona si es cierto o falso:
a) Cualquier número es múltiplo de 1 b) Cualquier número es divisible por sí mismo

DIVISORES DE UN NÚMERO

Un número **a** es divisor de otro número **b** si la división de b entre a es exacta.
Los divisores de un número se obtienen *dividiendo* el número entre los sucesivos números naturales que hacen que la división sea exacta.
Un número tiene una <u>cantidad limitada</u> de divisores, que serán menores o iguales que el propio número. Además, cualquier número tiene como divisores a sí mismo y a la unidad.
<u>Ejemplo:</u> Todos los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Observa que si ordenamos los divisores del número de menor a mayor y se van multiplicando las parejas, se obtiene siempre el número inicial:

1 2 3 4 6 8 12 24

Relaciones entre múltiplo y divisor: Si un número **a** es divisor de otro número **b**, entonces también se puede decir que **b** es múltiplo de **a**.

a es divisor de b	b es múltiplo de a
8 es divisor de 56	56 es múltiplo de 8
3 es divisor de 90	90 es múltiplo de 3

El número pequeño es el divisor y el grande es el múltiplo si al dividir el mayor entre el menor el resto es cero.

6. ¿El número 38 es divisor de 1596? ¿Es 2123 múltiplo de 27? Justifica la respuesta en cada caso.

7. Escribe cinco múltiplos del número 15 y todos sus divisores

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Un número es **primo** si sólo tiene dos divisores: él mismo y la unidad
Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores

Ejemplos: El número 12 es compuesto. El número 7 es primo.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Son reglas que nos permiten reconocer, sin realizar la división, si un número es divisible por otro. Los criterios de divisibilidad más importantes son:

Divisible por	Criterio de divisibilidad
2	Si la última cifra es 0 ó par
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3
5	Si la última cifra es 0 ó 5
10	Si la última cifra es 0
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es 0 ó es divisible por 11

8. Decide si estos números son primos o compuestos aplicando los criterios de divisibilidad:

a) 39 b) 440 c) 137 d) 196 e) 111

9. Completa en tu cuaderno los siguientes números para que sean divisibles por 3:

a) 45_ b) 6_2 c) 1_14 d) _78 e) 20_1

10. Escribe en tu cuaderno los números del 1 al 100 y rodea con un círculo los que sean primos (*Criba de Eratóstenes*)

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Factorizar o descomponer un número en factores primos consiste en expresarlo como producto de potencias de sus divisores primos.

Ejemplos: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $24 = 2^3 \cdot 3$

Para obtener la factorización de un número, lo dividimos entre los sucesivos números primos tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad. Posteriormente, escribimos el número como producto de todos los factores obtenidos, y si hay factores repetidos los expresamos como potencias.

Ejemplos:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24 = 2^3 \cdot 3$

30	2
15	3
5	5
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

11. Factoriza los siguientes números: a) 55 b) 16 c) 72 d) 60

12. ¿A qué número corresponden estas factorizaciones?:
a) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ c) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) DE VARIOS NÚMEROS

El *máximo común divisor de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes*.

Se obtiene:
- Escribiendo todos los divisores de cada número.
- Señalando los divisores comunes a todos ellos.
- Eligiendo el mayor de los señalados.

Ejemplo: $m.c.d.(30,12,18) = 6$

Divisores de 30: **1**, **2**, **3**, 5, **6**, 10, 15, 30

Divisores de 12: **1**, **2**, **3**, 4, **6**, 12

Divisores de 18: **1**, **2**, **3**, **6**, 9, 18

Si a y b no tienen divisores comunes, entonces: $m.c.d.(a,b) = 1$
En este caso, decimos que **a** y **b** son números primos entre sí.

13. Escribe todos los divisores de 18 y 72 y encuentra los que sean comunes. Indica cuál es el mayor divisor común.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) DE VARIOS NÚMEROS

El *mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes*.

Se obtiene:
- Escribiendo los primeros múltiplos de cada número.
- Señalando los múltiplos comunes a todos ellos.
- Eligiendo el menor de los señalados.

Ejemplo: $m.c.m.(12,15,20) = 60$

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**, 132, 144,…

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135,…

Múltiplos de 20: 20, 40, **60**, 80, 100, **120**, 140,…

Si a y b no tienen divisores comunes, es decir, son primos entre sí, entonces: $m.c.m.(a,b) = a \cdot b$

14. Escribe los primeros múltiplos de 16 y 18 y encuentra los que sean comunes. Indica cuál es el menor múltiplo común.

IES GÓMEZ PEREIRA
MEDINA DEL CAMPO

CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Para calcular el **máximo común divisor** de varios números seguimos los siguientes pasos:

1º. Descomponemos los números en factores primos
2º. Escogemos los factores **comunes**, elevados al **menor exponente**.
3º. El producto de estos factores es el máximo común divisor de los números.

Para calcular el **mínimo común múltiplo** de varios números seguimos los siguientes pasos:

1º. Descomponemos los números en factores primos
2º. Escogemos los factores **comunes** y **no comunes**, elevados al **mayor** exponente.
3º. El producto de estos factores es el mínimo común múltiplo de los números.

Ejemplo 1: $m.c.d.(30,12,18)$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2 \qquad \Rightarrow \quad m.c.d.(30,12,18) = 2 \cdot 3 = 6$

Ejemplo 2: $m.c.m.(12,15,20)$

$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 20 = 2^2 \cdot 5 \qquad \Rightarrow \quad m.c.m.(12,15,20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

15. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
a) 15 y 25 b) 32 y 35 c) 36 y 27 d) 14 y 45

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los problemas de m.c.d. consisten en dividir en grupos varios tipos de elementos sin que sobre ninguno.

16. En una joyería tienen 96 brillantes de color rojo y 144 verdes. Con esos brillantes quieren hacer collares de un solo color y se quiere que tengan todos el mismo número de piedras. Si los collares deben tener el mayor número de brillantes posible y que no sobre ninguna piedra, ¿cuántos brillantes tienen que poner en cada collar?

Los problemas de m.c.m. consisten en encontrar el primer número que es múltiplo de varios números a la vez.

17. En una parada de autobuses coinciden dos líneas diferentes. Los autobuses de una de las líneas pasan cada 30 minutos y los de la otra, cada 24 minutos. Si han coincidido a las 12:00 horas, ¿cuál es la siguiente hora a la que volverán a coincidir?

18. Completa en tu cuaderno con las siguientes expresiones: «múltiplo de», «divisor de»:

a) 15 es 5
b) 28 es 14
c) 10 es 100
d) 18 es 36
e) 15 es 30
f) 3 no es 14

19. Busca:

a) Los cuatro primeros múltiplos de 8
b) El primer múltiplo de 10 mayor que 70
c) Los múltiplos de 4 comprendidos entre 10 y 20
d) El múltiplo más pequeño de 33
e) Todos los divisores de 36
f) Un número que sólo tenga un divisor
g) Un número que sólo tenga dos divisores
h) ¿Cuál es el menor divisor de un número? ¿Y el mayor?

20. Indica si los siguientes números son primos o compuestos:

	5	13	12	4	6	16	11	17
Núm. de divisores								
Primo								
Compuesto								

21. Escribe un número de tres cifras que sea a la vez múltiplo de 2 y de 3.

22. ¿Qué valores puede tomar la cifra **c** para que el número 114**c** sea múltiplo de 6?

23. Sustituye la cifra **c** por la cifra que haga que el número 7**c**3 sea múltiplo de 3.

24. Calcula cuánto ha de valer la cifra **c** para que:

a) **c**35 sea divisible por 5 y por 3 a la vez
b) 43**c** sea divisible por 2 y 3 a la vez

25. Tenemos que guardar 36 balones en cajas, ¿de cuántas maneras distintas podré hacerlo de forma que en cada caja haya el mismo número de balones?

26. Carlos tiene entre 60 y 70 bombillas del árbol de Navidad para guardar en cajas. Si las guarda en cajas de 6, le sobran 3 bombillas, y si lo hace en cajas de 5 también. ¿Cuántas bombillas tiene?

27. Aplicando las reglas de divisibilidad, completa la siguiente tabla:

Divisible por:	**Números**								
	12	20	35	51	75	81	110	111	185
2									
3									
5									
10									

28. El número 825 no es divisible por 2. ¿Podrías cambiar estas cifras de lugar para obtener todos los números que sí lo sean?

29. Entre estos números hay dos que son primos, búscalos: 29 50 49 19 22
Expresa cada uno de los compuestos como producto de factores primos

30. Escribe la descomposición en factores primos de los números:

a) 897 b) 2130 c) 936 d) 1875 e) 1078 f) 112 g) 96 h) 240

31. ¿A qué número corresponden las siguientes descomposiciones en factores primos?

a) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ b) $3^2 \cdot 7$ c) $2 \cdot 3^3 \cdot 7$ d) $2^3 \cdot 3^2$

32. Agrupa factores y escribe correctamente estas descomposiciones factoriales:

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2$ b) $3^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 7$ c) $5^2 \cdot 7 \cdot 5^4 \cdot 7^3$ d) $2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$

33. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 24, 36 y 32 b) 60 y 180 c) 112 y 70 d) 110 y 132

e) 10, 8 y 20 f) 24, 45 y 150 g) 96, 108 y 240 h) 98, 96, 240 y 300

34. Comprueba si en estas parejas los números son primos entre sí:

a) 12 y 15 b) 15 y 49 c) 45 y 16 d) 22 y 21 e) 42 y 36 f) 39 y 52

35. Los cristales del instituto se limpian cada 9 semanas, los techos cada 12 y las estanterías de la biblioteca cada 6. ¿Cada cuántas semanas coincidirán las tres tareas?

36. María tiene 120 libros y Pablo 160. Para facilitar la mudanza quieren meter sus libros en cajas lo más grandes posible, con el mismo número de libros y sin que se mezclen. ¿Cuántos libros contendrá cada caja?

37. En la panadería de la esquina hay napolitanas recién hechas cada 10 minutos, ensaimadas cada 14 minutos y rosquillas cada 28 minutos. Si a las 11 y cuarto de la mañana pude comprar un producto de cada uno, recién hechos, ¿a qué hora podré volver a repetir una compra igual?

38. Una ONG tiene 48 envases de un medicamento A, 96 de otro B y 72 de otro C. Los quiere empaquetar en cajas que contengan la misma cantidad de cada uno de ellos y de forma que el número de envases de cada caja sea el mayor posible. ¿Cómo puede hacerlo? ¿Cuántas cajas necesita para empaquetarlos?

39. Un albañil quiere dividir en habitaciones cuadradas una nave industrial de 48 metros de largo por 36 metros de ancho. ¿Cuánto puede medir de lado como máximo cada habitación? ¿Cuántas habitaciones habrá en tal caso?

40. Se desea cuadricular una cartulina, de manera que el lado del cuadrado que forma la cuadrícula sea lo mayor posible. La cartulina mide 30 cm de ancho y 45 de largo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado?

41. Luis va a clase de música cada 3 días, y practica natación cada 5 días. ¿Cada cuántos días le coinciden las dos actividades?

42. Una familia acude a un restaurante; en total son 32 personas y el restaurante dispone de mesas para 4, 6 y 8 personas. ¿De cuántas formas se pueden organizar si quieren que todas las mesas tengan los mismos comensales?

43. Andrés tiene una colección de sellos que puede agrupar de 12 en 12, de 16 en 16 y de 18 en 18 sin que sobre ninguno. ¿Cuál es el número de sellos que puede tener si se sabe que es menor de 150?