TEMA 3: NÚMEROS DECIMALES, FRACCIONES Y OPERACIONES CON FRACCIONES.

NÚMEROS DECIMALES

Tipos de números decimales.

- **Decimal exacto:** La parte decimal de un número decimal exacto está compuesta por una cantidad finita de términos.
  Ejemplos: 5,04 ; 0,023 ; -8,2409
- **Decimal periódico:** La parte decimal tiene infinitas cifras que se repiten periódicamente.
  - ✓ **Periodico puro**: La parte decimal, llamada periodo, se repite infinitamente.
    Ejemplo: 7,81818181…. = $7,\widehat{81}$
  - ✓ **Periodico mixto:** Su parte decimal está compuesta por una parte no periódica y una parte periódica o período.
    Ejemplo: 23, 34012012012….= $23,34\widehat{012}$
- **Decimal no exacto y no periódico:** Números decimales que no pertenecen a ninguno de los tipos anteriores, es decir, su parte decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente.
  Ejemplos: $\sqrt{2}$ = 1,4142135… π = 3,14159265…

Paso de fracción a decimal.

- Para obtener la expresión decimal de una fracción se efectúa la división del numerador entre el denominador.
- El cociente puede ser **un número entero**, cuando el numerador es un múltiplo del denominador.
- Toda fracción irreducible da lugar a un número decimal:
  - ✓ **Un decimal exacto**, si el denominador solo tiene factores primos 2 y/o 5.
  - ✓ **Un decimal periódico**, si el denominador tiene algún factor primo distinto de 2 y 5.

Paso de decimal a fracción.

- ***De decimal exacto a fracción.*** *En el numerador se pone todo el número sin la coma decimal y en el denominador se colocan tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Si se puede simplificar, se simplifica.*

$$0{,}045 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

- ***De decimal periódico puro a fracción.*** *En el numerador se anota el número, sin la coma decimal, y se le resta él o los números que están antes del período. En el denominador se pone un 9 por cada número que está en el período. Si se puede simplificar, se simplifica.*

$$2,\widehat{41} = \frac{241-2}{99} = \frac{239}{99}$$

- ***De decimal periódico mixto a fracción.*** El numerador de la fracción se obtiene restando al número, sin la coma decimal, la parte entera y el anteperíodo. El denominador de la fracción se obtiene colocando tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras tenga el anteperíodo. Si se puede simplificar, se simplifica.

$$1{,}02\hat{7} = \frac{1027 - 102}{900} = \frac{925}{900} = \frac{37}{36}$$

- **Decimales no periódicos.** Los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no se pueden poner en forma de fracción.

1. Escribe cuatro números comprendidos entre cada par de números:

   a) 1,6 y 1,8
   b) 0,98 y 1
   c) $2,\hat{3}$ y 2,4
   d) - 4,123 y - 4,122
   e) $3{,}\widehat{12}$ y $3{,}\widehat{121}$

2. Ordena de mayor a menor.

   a) $2{,}7\hat{1}$; $2{,}\hat{7}$; $2{,}\widehat{71}$; 2,7
   b) $34{,}47\hat{5}$; $34{,}\widehat{475}$; $34{,}4\widehat{75}$; 34,475
   c) $12{,}4\widehat{55}$; $12{,}4\widehat{55}$; $12{,}\widehat{455}$; 12,455
   d) $25{,}9\hat{9}$; $25{,}\widehat{99}$; $25{,}9\widehat{99}$; 25,99

3. Expresa en forma de decimal las siguientes fracciones y di que tipo de número decimal es:

   $$\frac{7}{5}, -\frac{5}{3}, \frac{48}{50}, \frac{75}{99}, -\frac{32}{25}, \frac{56}{30}, \frac{45}{33}, -\frac{125}{180}$$

4. Expresa en forma de fracción:
   a) $0{,}6\hat{7}$
   b) $3{,}\widehat{654}$
   c) $3{,}0\widehat{03}$
   d) $10{,}12\hat{3}$
   e) $6{,}7\widehat{230}$
   f) $0{,}\widehat{65}$
   g) 50,1
   h) $0{,}04\hat{8}$

5. Calcula pasando previamente a fracción:

   a) $6,\hat{7}$ – 6,07 =
   b) 3,7 – 1, $\widehat{07}$ =
   c) $4,5\hat{6}$ + $5,3\hat{2}$ =
   d) $6,\widehat{18}$ – $7,\widehat{85}$ =

NÚMEROS RACIONALES.

- Los **números naturales** se designan por $\mathbb{N}$, y son $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5, \dots.\}$
- Los **números enteros** son los naturales y sus opuestos, y se designan por la letra $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{\dots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Una **fracción** es el cociente indicado de dos números enteros $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{Numerador}{Denominador}$

  Si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción representa un número entero. En caso contrario, representa un **número fraccionario.**
  - **Simplificación de fracciones.** Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por el mismo número. Una fracción que no se puede simplificar se dice que es **irreducible.**
  - **Dos fracciones son equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad, es decir, cuando al simplificarse, dan lugar a la misma fracción irreducible.
  - Para **comparar dos fracciones con distinto denominador,** las reducimos a común denominador, buscando dos fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador.
- Los **números racionales** se designan por la letra $\mathbb{Q}$**,** y es la unión de todos los números enteros y fraccionarios, es decir son aquellos que se pueden poner en forma de fracción.

6. Dibuja la recta real y coloca en ella de forma aproximada los siguientes números:
   a) $\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{3}$
   b) $\frac{4}{5}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{19}{30}, -\frac{1}{10}, \frac{3}{15}$
   c) $-0.5, \frac{4}{3}, -\frac{5}{12}, \frac{5}{8}, 1.3, -\frac{7}{24}, \frac{3}{2}$
   d) $\frac{3}{5}, -\frac{1}{3}, -2.1, \frac{2}{7}, -\frac{4}{21}, 0.8, \frac{8}{15}, \frac{3}{35}$
   e) $\frac{5}{6}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{10}, \frac{8}{15}, -\frac{7}{12}, \frac{3}{4}$

7. Ordena de mayor a menor los números del apartado anterior.

8. Simplifica las siguientes fracciones hasta conseguir la fracción irreducible.

$$\frac{35}{140}, -\frac{160}{240}, \frac{384}{336}, -\frac{132}{495}, \frac{550}{150}, -\frac{288}{360}, \frac{189}{351}, \frac{225}{400}$$

9. Agrupa las fracciones que sean equivalentes.
   a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{10}, \frac{10}{25}, \frac{9}{77}, \frac{4}{12}$
   b) $\frac{4}{3}, \frac{6}{14}, \frac{21}{49}, \frac{3}{7}, \frac{8}{6}, \frac{24}{18}, \frac{16}{12}$
   c) $\frac{2}{3}, \frac{35}{49}, \frac{5}{7}, \frac{4}{6}, \frac{32}{48}, \frac{25}{35}, \frac{14}{21}$

OPERACIONES CON FRACCIONES.

- Para **sumar o restar fracciones con igual denominador**, se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador.
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$
- Para **sumar y restar fracciones con distinto denominador**, reduciremos a común denominador.
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot (b\colon mcm(b,c)) + c \cdot (c\colon mcm(b,d))}{mcm(b,d)}$$
- Si alguno de los **sumandos es un número entero**, se le trata como una fracción con denominador la unidad.
$$\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c}{1}$$
- Para **multiplicar fracciones** se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
- La **inversa de una fracción** es aquella que resulta de intercambiar el numerador y el denominador.
$$\frac{b}{a} \text{inversa de } \frac{a}{b}$$
- Para calcular el **cociente de dos fracciones** se multiplican la primera por la inversa de la segunda.
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$
- **Las fracciones son operadores.** Para calcular la fracción de una cantidad, se multiplica la fracción por dicha cantidad.
  - Las distintas partes (fracciones) de un <u>todo suman 1</u>.
  - Para hallar <u>la parte de otra parte</u> de una cantidad, se multiplican.

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{8}{3}-\left(4+\frac{3}{2}\cdot 7\right)=$

b) $\frac{2}{5}+\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{2}-\frac{11}{3}:\frac{5}{4}=$

c) $\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-3}{8}\right)=$

d) $10+\frac{7}{2}:\frac{6}{8}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{10}{3}\right)=$

e) $\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=$

f) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+5-3\cdot\left(4:\frac{3}{5}+1\right)=$

g) $\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{3}-\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right]\cdot\frac{8}{5}=$

h) $\frac{4}{5}:\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{8}\right]-3\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=$

i) $-\frac{2}{3}\cdot\left[\left(1:\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}:\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}\right):3\right]=$

j) $\frac{5}{6}-\frac{3}{7}:\frac{9}{14}+\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right):\frac{16}{45}-\frac{1}{24}=$

PROBLEMAS DE FRACCIONES.

11. Julio pasa un cuarto del día en el colegio, un octavo lo dedica a comer, un sexto a estudiar, un doceavo a hacer deporte y el resto a dormir. ¿Qué fracción de día dedica a dormir?

12. A dos primos les toca los 13/18 de una herencia familiar. Si uno de ellos recibe 5/9 ¿Cuánto recibirá el otro?

13. Un ciclista recorre el primer día 2/7 de la distancia, el segundo 1/8 y el tercero retrocede 3/14. ¿Qué fracción de distancia lleva recorrido?

14. Un estudiante invierte 1/3 de su salario semanal en ir al cine, 3/5 en revistas deportivas y el resto lo ahorra. ¿Qué fracción del dinero ahorra a la semana?

15. Un hortelano planta dos tercios de su huerta de tomates y un quinto de pimientos y el resto lo deja sin cultivar. ¿Qué fracción de la huerta no ha cultivado? Si la huerta tenía 2840 m^2, ¿cuántos ha plantado de tomates? ¿Qué tipo de número se obtiene?

16. De una garrafa de leche se saca primero la mitad y después la quinta parte del resto, quedando todavía en la garrafa 12 litros ¿cuál es la capacidad de la garrafa?

17. Los 3/4 de las calculadoras de bolsillo que vende un comercio son científicas y, de éstas, una fracción 5/12 son programables. Averigua qué fracción de las calculadoras vendidas son programables. De 400 calculadoras vendidas en un año, ¿cuántas eran programables?

18. En un partido de baloncesto Luis hizo 1/8 de los puntos, Sonia los 2/8 y Laura los 3/8. Los restantes jugadores hicieron 16 puntos. Calcula el número de puntos conseguidos por Luis, Sonia y Laura.

19. Un embalse está lleno en 3/4 de su capacidad. Gracias a las lluvias la cantidad de agua aumenta 1/5 de lo que faltaba por llenarse. Durante el año siguiente se consume 1/10 del agua que había. ¿Qué fracción de la capacidad del embalse queda al final del año?

20. De mis vacaciones de verano 2/3 las paso en mi pueblo, una vez allí, 1/5 del tiempo estoy en la piscina. ¿Qué fracción de mis vacaciones estoy en la piscina? Si tengo 90 días de vacaciones ¿Cuántos días paso en la piscina?

POTENCIAS DE FRACCIONES.

- **Potencia de una fracción**. Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

- **Potencia de un producto de fracciones.** La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right) = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^2$$

- **Potencia de un cociente de fracciones.** La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\right)^3 = \frac{a^3\cdot d^3}{b^3\cdot c^3} = \frac{a^3}{b^3}:\frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3:\left(\frac{c}{d}\right)^3$$

- **Producto de potencias de la misma base.** Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5 \leftarrow (5 = 3 + 2)$$

- **Cociente de potencias de la misma base.** Para dividir dos potencias se la misma base, se restan los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^7}{b^7} : \frac{a^4}{b^4} = \frac{a^7 \cdot b^4}{b^7 \cdot a^4} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \leftarrow (3 = 7 - 4)$$

- **Potencias de exponente cero (a^0).** La potencia de exponente cero vale siempre uno (para cualquier base distinta de cero).

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \end{array}\right\} \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

- **Potencias de exponente negativo.** Una potencia de exponente negativo es la inversa de la misma potencia de exponente positivo.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^3}{b^3} : \frac{a^5}{b^5} = \frac{a^3 \cdot b^5}{b^3 \cdot a^5} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3-5} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} \end{array}\right\} \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

- **Potencia de otra potencia.** Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{a^2}{b^2}\right]^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^6 \leftarrow (6 = 2 \cdot 3)$$

21. Simplificar, mediante las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia lo más simple posible.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 =$$

$$\left[\frac{9^2}{(-3)^2}\right]^{-1} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}=$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}=$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}=$$

$$\frac{3^{10}}{9^{7}}=$$

$$7^{8}:\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{2}\right]^{-3}=$$

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right]^{-3}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}\right]^{-2}}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}:\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}:\frac{1}{5}}=$$

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right]^{3}=$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{2}=$$

$$\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}=$$

$$\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}\right]^{3}=$$

$$\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{2}\right]^{-1}=$$

$$\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\right)^{5}=$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}\cdot\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 9=$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}}=$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=$$

$$\left[\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot(-2)\right]^{-4}=$$

$$\frac{\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right]^{-2}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}}=$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}\cdot\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 9=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}}{\left[\left(4^{2}\right)^{-3}\right]^{2}\cdot 64^{3}}=$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}}=$$

$$\frac{\left(-\frac{9}{25}\right)^{4}\cdot 1^{-5}}{\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}}=$$

22. Resolver las siguientes operaciones combinadas:

$$3-\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{5}{4}-\left[\frac{7}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]+(-1)$$

$$\left(5^{-1}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)^{0}-\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)^{-2}$$

$$\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}+\frac{9}{10}\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\cdot 5^{-1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}:\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\right)+\frac{5}{4}\cdot\left(2^{-3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\left(2^{-2}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^{3}$$

$$4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^{3}+3\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^{2}-\frac{45}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{17}{16}=$$

$$4\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{3}+3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{2}-\frac{45}{4}\cdot\frac{7}{4}+\frac{17}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)^{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$\left(3-\frac{1}{2}\right)^{2}\div\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^{3}$$

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\right]\div\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\div\left(\frac{3}{5}\right)^{6}-\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\right]^{3}$$