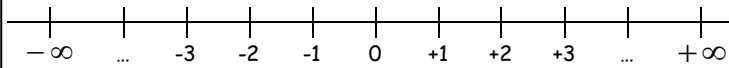


TEMA 4 LOS NÚMEROS ENTEROS **Z**

¿QUIÉNES LO FORMAN?



¿POR QUÉ SURGEN?

Situaciones de la vida cotidiana hacen necesaria su existencia: deudas, Temperatura bajo cero,...

VALOR ABSOLUTO

Es la distancia en la recta numérica del nº entero al 0.

$$|-5| = 5 \quad | +3 | = 3$$

MULTIPLICACIÓN

+	.	+	=	+
-	.	-	=	+
+	.	-	=	-
-	.	+	=	-

DIVISIÓN

+	:	+	=	+
-	:	-	=	+
+	:	-	=	-
-	:	+	=	-

OPERACIONES

REGLA DE LOS SIGNOS

SUMA

Del mismo signo

De distinto signo

RESTA

MULTIPLICACIÓN o PRODUCTO

PROPIEDADES

ASOCIATIVA

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

CONMUTATIVA

$$a \cdot b = b \cdot a$$

ELEMENTO NEUTRO

$$a \cdot (+1) = (+1) \cdot a = a$$

DISTRIBUTIVA
RESPECTO DE LA
SUMA

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ORDEN DE LAS OPERACIONES

1. Resolvemos los paréntesis. Si hay varios se empieza por los interiores.
2. Potencias y raíces.
3. Calculamos las multiplicaciones y las divisiones. Si aparecen seguidas, empezamos por la izquierda.
4. Calculamos las sumas y las restas.



NÚMEROS ENTEROS

Hay situaciones cotidianas que no se pueden expresar con números naturales. En ellas usamos otro tipo de números; los **números enteros**.

Los números enteros son los números naturales precedidos del signo + ó del signo -, dependiendo de si la cantidad expresada está por encima o por debajo de cero.

El conjunto de los números enteros, que designamos por Z, está formado por:

- Los números enteros positivos: +1, +2, +3, (que son los números naturales)
- El número 0
- Los números enteros negativos: -1, -2, -3,

(Al escribir los números enteros positivos, es habitual no poner el signo +)

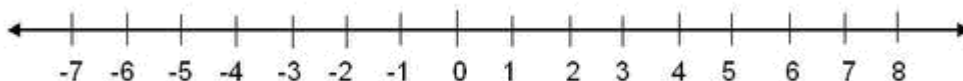
1. Expresa con un número entero:

- a) El submarino ha descendido a 100 metros bajo el nivel del mar.
- b) Ramón debe 8€ a su amigo Juan.
- c) Estamos a 5 grados bajo cero.
- d) El comedor de un hotel está en el primer sótano
- e) Me han ingresado 200€ en la cuenta del banco.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica:

- o El cero divide a la recta en dos partes iguales.
- o Fijamos el 1 y elegimos como unidad su distancia al cero.
- o Desplazamos dicha unidad a la derecha del cero, para representar los enteros positivos, y a la izquierda, para representar los negativos.



VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

El valor absoluto de un número entero es la distancia, en unidades, que le separa del cero en la recta numérica.

Se escribe entre dos barras, | |, y es igual al número sin su signo. $|+b| = b$ $|-a| = a$

2. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

- a) $|+3|$ b) $|-35|$ c) $|-12|$ d) $|+15|$

OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO

Decimos que dos números enteros distintos son opuestos si están situados a la misma distancia del cero.

$$Op(+a) = -a \qquad Op(-a) = +a$$

3. Determina los opuestos de estos números:

- a) $Op(+2)$ b) $Op(-6)$ c) $Op(-20)$ d) $Op(Op(-5))$

4. Completa en tu cuaderno:

- a) $| \quad | = 5$ b) $Op(\quad) = -7$ c) $Op(\quad) = 9$ d) $| \quad | = 10$



COMPARACIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

- Cualquier número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo
- De dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- De dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

Dados dos números enteros, es mayor el que está situado más a la derecha de la recta numérica.

5. Representa sobre la recta numérica y ordena de mayor a menor los siguientes números enteros: 3, -5, 14, -12, -6, 0, 7, -1, 2, -13

6. Durante el año pasado, las temperaturas mínimas en Burgos fueron éstas:

Ene	Feb.	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
-4°	0°	-2°	6°	5°	12°	16°	9°	7°	2°	-1°	-6°

Ordena los meses del año del más frío al más cálido.

7. Di si son ciertas o falsas estas desigualdades:

- a) $3 > -5$ b) $-5 < -7$ c) $-4 < 2$ d) $9 < -7$ e) $0 > -5$ f) $-2 < -6$

8. Encuentra, en cada caso, tres números:

- a) Mayores que -10 y menores que -3
b) Mayores que -4 y menores que +2
c) Mayores que -2 y menores que 6

9. Encuentra el número que se describe:

- a) Es 4 unidades menor que +8 b) Es 4 unidades mayor que -8
c) Es 4 unidades menor que -8 d) Es 8 unidades mayor que -4
e) Es 8 unidades menor que +4 f) Es 8 unidades menor que -4

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

Para sumar dos números enteros del mismo signo, se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo de los números.

Para sumar dos números enteros de distinto signo, se restan sus valores absolutos y se pone el signo del número con mayor valor absoluto.

Ejemplos: $+2+5=+7$ $-2-5=-7$ $+2-5=-3$ $-2+5=+3$

10. Calcula en tu cuaderno:

- a) $3-8$ b) $-5+7$ c) $-5-4$ d) $15+6$ e) $-4-12$
f) $9-5$ g) $2-9$ h) $-8+4$ i) $-2+9$ j) $-3-10$

Para sumar varios números enteros, se suman los que llevan signo +, se suman los que llevan signo -, y finalmente se restan los dos resultados, poniendo el signo del de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

- a) $-3+10-5+2=12-8=4$ b) $5-7-2=5-9=-4$ c) $-4+5-7=5-11=-6$



11. Calcula en tu cuaderno:

- a) $3+5-6$ b) $7-11+4+3$ c) $-3+2-5-1$ d) $-4+7+8-1$
 e) $-3+4-6-5+8$ f) $5-10-4+3+5$ g) $6+2-5+10-13$ h) $-4-1-2-1+10$

Suma y resta de números enteros con paréntesis:

Se quitan los paréntesis teniendo en cuenta estas reglas:

$$\boxed{+(+a)=+a \quad +(-a)=-a \quad -(+a)=-a \quad -(-a)=+a}$$

Después, se sigue el proceso ya indicado.

Ejemplos:

- a) $3-(-2)=3+2=5$ b) $+(-7)-(+2)=-7-2=-9$
 c) $(-3)+(-4)-(+5)=-3-4-5=-12$ d) $3-(-5)-(+2)=3+5-2=6$

12. Quita los paréntesis y calcula:

- a) $-1-(-3)+(-5)$ b) $+3-(+1)+(4)$ c) $-6-(-2)-(+7)$
 d) $3+(-8)-(-2)$ e) $-2-(-4)+(-7)$ f) $-(-5)+2-3+(-4)$
 g) $-10-(+3)-(-1)+6$ h) $-(+4)-2+(-4)-(-8)$ i) $1-5-7+(-2)-(-10)$

Cuando dentro de un paréntesis hay varios sumandos, primero hacemos las operaciones que hay entre paréntesis y después ya quitamos los paréntesis siguiendo las reglas anteriores

Ejemplo: $-(-6+4)+(3-7)-(+2-10)=-(-2)+(-4)-(-8)=2-4+8=6$

13. Calcula:

- a) $(+1-5)-(4-2)+(3-8)$ b) $+(7-9)-(-3+5)-(+2-8)+(-1+6)$
 c) $(-3+4)-(-2-1)+(2-5)-(6-4)$ d) $-(-4+6)+(5-1)-(+6-9)+(5-7)$
 e) $-(2-8)+(6+1)+(1-3)-(-1+5)$ f) $(2+4)+(-7+4)-(5-9)-(-4+8)$
 g) $(3+8)-(6+4)+(1-7)-(-2-1)$ h) $-(-5+9)-(4-7)+(+2-3)+(4-8)$

PRODUCTO Y COCIENTE DE NÚMEROS ENTEROS

Para multiplicar o dividir números enteros, se multiplican o dividen los valores absolutos y se aplica la regla de los signos:

$(+)\cdot(+)=+$	$(+):(+)=+$
$(+)\cdot(-)=-$	$(+):(-)=-$
$(-)\cdot(+)=-$	$(-):(+)= -$
$(-)\cdot(-)=+$	$(-):(-)=+$

Ejemplos: $(-5)\cdot(-2)=+10$ $(-5)\cdot(+2)=-10$ $18:(-2)=-9$ $(-15):(-3)=5$

14. Calcula:

- a) $(-10):(-1)$ b) $3\cdot(-4)$ c) $(-3)\cdot(-2)\cdot 4$ d) $(-6)\cdot(-2):(-4)$
 e) $3\cdot(-8):(6)$ f) $4\cdot(-2)\cdot 3$ g) $(-7)\cdot 2\cdot(-3)$ h) $4\cdot(-9):(12)$



POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

Cuando la base de la potencia es un número positivo, operamos igual que con los números naturales, quedando el resultado siempre un número positivo.

Si la base de la potencia es un número negativo, el resultado depende del signo del exponente:

Si el exponente es un número par, el resultado es positivo: $(-a)^{\text{par}} = +$

Si el exponente es un número impar, el resultado es negativo: $(-a)^{\text{impar}} = -$

Nota: No es lo mismo: $(-5)^2$ que -5^2

Ejemplos: a) $2^3 = 8$ b) $(-2)^2 = +4$ c) $(-2)^3 = -8$ d) $(-3)^3 = -27$ e) $(-3)^2 = +9$

15. Indica si el resultado de estas potencias es positivo o negativo:

a) 7^5 b) $(-13)^{10}$ c) $(-6)^{23}$ d) $(-5)^{21}$ e) 15^4 f) $(-1)^{99}$ g) 1^{50}

RAÍZ CUADRADA DE NÚMEROS ENTEROS

La raíz cuadrada de un número entero positivo tiene dos soluciones.

La raíz cuadrada de un número negativo no existe.

Ejemplos: a) $\sqrt{9} = 3$ y -3 b) $\sqrt{-9} = \text{No existe}$ c) $\sqrt{36} = 6$ y -6 d) $\sqrt{-36} = \text{No existe}$

16. Calcula:

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt{-1}$ d) $\sqrt{-100}$ e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{-64}$ g) $\sqrt{49}$ h) $\sqrt{-144}$

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS

El orden que debemos seguir es:

- Realizamos las operaciones que hay dentro de los paréntesis
- Resolvemos las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.
- Calculamos las sumas y las restas también de izquierda a derecha.

17. Calcula:

a) $3 - 7 \cdot \sqrt{4} + 5$ b) $(9 - 3 \cdot 4) \cdot 3 + (1 + 4 \cdot 2)$ c) $8 + 4 \cdot (-3) + (-5) \cdot 2$
d) $3 - 2 \cdot 5 - 6 : (-3)$ e) $5 \cdot 2^2 - 7 - 4 \cdot 6$ f) $1 + 3 \cdot [2 - (-3 - 8 : 4) - 7]$
g) $(5 - 4)^2 - (5^2 - 4^2)$ h) $6 - [-11 - 14 : (-2)] - [9 - (-3)]$ i) $6 - [-3 + 24 : (-4) - 3^2]$

PROBLEMAS CON NÚMEROS ENTEROS

18. Pasando por la provincia de Valladolid el termómetro del coche marca una temperatura interior de 17°C y una temperatura exterior de -4°C . ¿Cuántos grados de diferencia hay entre ambas temperaturas?

19. Un avión vuela a 7950 metros y, en la misma vertical, un submarino navega a 275 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros los separan?



20. Calcula y representa en la recta numérica los siguientes números enteros:

- a) El opuesto de 3.
- b) El número situado 3 unidades a la izquierda de -5
- c) El valor absoluto de -9
- d) El número situado 2 unidades a la derecha de -5

21. ¿Cuántos números hay situados a 3 unidades del número -1? ¿Cuáles son? Representalos.

22. Escribe el grupo de números enteros que cumplen las siguientes características:

- a) Son mayores que +2 y menores que +6
- b) Son mayores o iguales que -6 y menores que -2
- c) Son mayores que -2 y menores o iguales que +6
- d) Son mayores o iguales que -6 y menores o iguales que +2.

23. Con los siguientes números: -3, 4, -2, 0, 11, -9, -4, 1

- a) Ordénalos de menor a mayor.
- b) Ordena de menor a mayor sus valores absolutos.
- c) Ordena de menor a mayor sus opuestos.

24. Completa en tu cuaderno:

- a) $-7 < _ < _ < -2$
- b) $3 < _ < _ < 8$
- c) $-6 < _ < _ < -1$
- d) $-7 _ -5$
- e) $0 < _ < _ < 6$
- f) $-9 < _ < _ < -6$
- g) $6 _ -5$
- h) $-2 _ 0$

25. Calcula:

- a) $11 + 21$
- b) $-92 + 49$
- c) $-22 - 36$
- d) $10 - 3 + 5$
- e) $-4 - 3 - 2$
- f) $-13 + 6 + 4$
- g) $-2 + 10 - 15$
- h) $-11 - 4 + 8$
- i) $-8 + 5 + 6$
- j) $5 - 9 + 8$
- k) $2 - 5 - 4 + 8$
- l) $5 + 7 - 4 - 2$
- m) $-4 - 9 + 6 + 2$
- n) $-5 + 7 - 3 + 7$
- ñ) $3 + 7 - 4 + 5$
- o) $-8 + 2 - 7 + 6$
- p) $-1 + 5 - 7 + 6$
- q) $-5 - 3 - 4 - 2$

26. Quita paréntesis y calcula:

- a) $+(+8) - (+5)$
- b) $-(+6) - (-3)$
- c) $+(-9) - (+6)$
- d) $-(+6) + (+4)$
- e) $+(-1) - (+4) + (+8) - (+7) + (-10) - (-6)$
- f) $+(-11) - (-13) + (-15) - (+16) + (-9) - (-7)$
- g) $+(5+3)$
- h) $+(-6-3)$
- i) $-(8+15)$
- j) $+(9-7-2)$
- k) $-(1-8+3)$
- k) $7+(2-8)$
- l) $12+(-3+10)$
- m) $15-(8+11)$
- n) $(5+8)-(7+6)$
- ñ) $-(16-9)-(10-7)$

27. Calcula:

- a) $6 + [5 + (7 + 2)]$
- b) $8 + [4 - (3 + 5)]$
- c) $10 - [6 + (2 - 7)]$
- d) $15 - [2 - (6 - 10)]$
- e) $(-6) + [5 + (2 - 12)]$
- f) $(-7) - [3 - (4 - 9)]$
- g) $(2 - 10) + [5 - (8 + 2)]$
- h) $[9 - (+5)] + [7 + (-10)]$
- i) $[8 - (6 + 4)] - (5 - 7)$
- j) $(-4) \cdot (-1) \cdot (+6)$
- k) $(+80) : (-8) : (-5)$
- l) $(+50) : [(-30) : (+6)]$
- m) $[(+6) \cdot (-4)] : (-3)$
- n) $(+50) : (-10) \cdot [(-30) : (+6)]$
- ñ) $(-70) : (-2) : (-7)$
- o) $5 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3)$
- p) $2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-7) - 4 \cdot (+3)$
- q) $(-20) : [(-6) - (-2)]$
- r) $(+27) : (-3) - (+3) \cdot (-5) - (-6) \cdot (-2)$
- s) $19 - (-3) : [5 - (+8)]$
- t) $10 - (+20) : [7 + (-3)]$
- u) $(-2) \cdot (5 - 7) - (-3) \cdot (8 - 6)$



28. Calcula:

- a) $(-2)^4$ b) -2^4 c) $(-5)^2$ d) 5^3 e) $(-5)^3$ f) $(-10)^4$ g) -10^6
 h) $\sqrt{-4}$ i) $\sqrt{-1}$ j) $\sqrt{1}$ k) $\sqrt{100}$ l) $\sqrt{16+9}$ m) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$

29. Reduce a una sola potencia, aplicando las propiedades de las operaciones con potencias:

- a) $(-4)^8 : (-4)^5$ b) $(-2)^3 \cdot (-2)^5 : (-2)^6$ c) $(+32)^5 : (-8)^5$
 d) $(-3)^4 \cdot (-5)^4$ e) $(-5)^8 : [(-5)^2 \cdot (-5)^3]$ f) $(-21)^6 : (-7)^6 : 3^6$

30. Este mes, David debe pagar 1650 € por un arreglo de su coche, 1380 € de una reforma doméstica y 480 € de la hipoteca. Si tiene ahorrados 3200 €, ¿puede pagar todo?

31. Cierta día de enero amaneció con una temperatura de 2°C bajo cero subiendo después 10°C. Por la tarde bajó 4°C. ¿Qué temperatura había después de esas variaciones?

32. Pedro y Luisa tienen una libreta de ahorros donde les ingresan las nóminas de sus trabajos y tienen domiciliados sus recibos. Estas son las últimas anotaciones:

Movimiento	Saldo	Concepto
-120	200	Recibo luz
1500		Nómina de Pedro
	1400	Recibo gas
-1470		Hipoteca
	730	Nómina de Luisa

- a) ¿Cuál es el saldo antes de pagar el recibo de la luz?
 b) ¿Y después del ingreso de la nómina de Pedro?
 c) ¿Cuál ha sido el importe del recibo del gas?
 d) ¿Y el saldo después de pagar la hipoteca?
 e) ¿Qué cantidad ha cobrado Luisa por su nómina?

33. Alejandro trabaja en la planta 23 de un edificio y cuando aparca su coche en el garaje que la empresa tiene en los sótanos, tiene que subir 27 plantas para llegar a su puesto de trabajo. ¿En qué planta aparca?

34. El matemático griego Tales de Mileto nació en el año 624 a.C. y vivió 78 años. ¿En qué año murió?

35. Euclides, famoso geómetra, murió en el año 265 a.C. y vivió 60 años. ¿En qué año nació? ¿En qué año nació una persona dos años mayor que Euclides?

36. Pitágoras, filósofo y matemático griego, vivió entre los años 582 y 496 a.C. ¿A qué edad murió? ¿Cuántos años hace de eso?

37. Hipatia de Alejandría fue una científica, filósofa y profesora que murió asesinada en el año 415 a la edad de 45 años. Arquímedes fue un matemático griego que murió a la edad de 75 años durante el asedio a la ciudad de Siracusa por los romanos en el año 212 a.C. ¿En qué año nació cada uno?

38. Una cámara frigorífica es capaz de enfriar su interior a un ritmo de -2°C cada hora.

- a) ¿Cuántos grados menos habrá en el interior después de tres horas?
 b) Si la temperatura inicial es de 3°C bajo cero, ¿cuál será la temperatura después de 8 horas?
 c) Si tras 6 horas el interior está a -7°C, ¿cuál era la temperatura antes de las 6 horas?
 d) ¿Cuánto tarda en bajar la temperatura 12°C?



Calcula:

1. $6 \cdot 4 - 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3 =$
2. $15 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 =$
3. $5 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 - 6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-6) =$
4. $18 - 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) =$
5. $(-5) \cdot (8 - 13) =$
6. $(2 + 3 - 6) \cdot (-2) =$
7. $(+4) \cdot (1 - 9 + 2) : (-3) =$
8. $(-12 - 10) : (-2 - 6 - 3) =$
9. $13 - [8 - (6 - 3) - 4 \cdot 3] : (-7) =$
10. $5 \cdot (8 - 3) - 4 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (1 - 6) =$
11. $12 \cdot (12 - 14) - 8 \cdot (16 - 12) - 4 \cdot (5 - 17) =$
12. $18 - 40 : (5 + 4 - 1) - 36 : 12 =$
13. $48 : [5 \cdot 3 - 2 \cdot (6 - 10) - 17] =$
14. $4 + 36 : 9 - 50 : [12 + (17 - 4)] =$
15. $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5] =$
16. $13 - 24 : [5 - (-7)] + 6 \cdot (-4 + 4) =$
17. $[9 + (-9)] \cdot 0 + (12 + 3) : (-5) - 1 \cdot (-2) =$
18. $(-5) \cdot [6 - (3 - 9)] - 8 \cdot [(-2) + 7 - 1] =$
19. $8 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 3) - 4 \cdot 5 - 2 \cdot [6 \cdot (-5) \cdot 7] =$
20. $3 \cdot (-2 + 7) - 10 + [(-3) + 6] : (-3) =$
21. $[5 \cdot (-9)] : 3 + 15 - 3 \cdot (-4) =$
22. $[7 - (-5)] \cdot (-3) + (-6) \cdot (-2) + 11 =$
23. $[(-5) - (-15)] : (6 - 8) + 7 + 80 : [25 - 3 + (-2)] + (-15) =$
24. $3 \cdot [4 + (-6)] - (-2) \cdot [(-8) - 5] - 5 \cdot [(-5) + 2 - (4 + 6 - 1)] =$
25. $(-2) \cdot [8 - 4 - (-10)] + [(-6) - (-3)] \cdot [5 - (-2)] =$
26. $(-2) \cdot 7 + 5 \cdot (-6) + 4 \cdot (-20) - 2 \cdot (-40) =$
27. $3 \cdot [(-6) : (-2)] + [3 \cdot (-6)] : (-2) =$
28. $2 - [8 - (4 - 10)] - (11 - 12) - (-5) =$
29. $5^0 \cdot 4^1 + 3^2 - 2^3 =$
30. $2^4 + 3 \cdot 4^3 - 125 : 5^2 =$
31. $3^4 - 4^2 \cdot (3 + 5^0) =$
32. $10 \cdot 10 - 7^2 + 2 \cdot 6 + 35 : 5 - 3^2 =$