

## TEMA 4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES.

### RAZONES Y PROPORCIONES.

La **razón** de los números a y b es la fracción  $\frac{a}{b}$  (o su irreducible).

Una **proporción** es la igualdad de dos razones:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

y se lee: a es a b como c es a d.

Para **calcular el término desconocido** en una proporción, se aplica la propiedad de las fracciones equivalentes:

El producto de los extremos, a y x, es igual al de los medios, b y c.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad a \cdot x = b \cdot c \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

### MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

En las magnitudes directamente proporcionales, multiplicando (dividiendo) por el mismo número dos valores correspondientes se obtiene otro par de valores correspondientes.

|            |   |       |       |     |    |
|------------|---|-------|-------|-----|----|
| MAGNITUD A | a | 2 · a | 3 · a | ... | ka |
| MAGNITUD B | b | 2 · b | 3 · b | ... | kb |

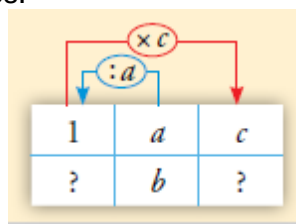
RESOLUCION DE PROBLEMAS:

Relaciones en las tablas de proporcionalidad directa

En una tabla de proporcionalidad directa, dos pares de valores correspondientes forman una proporción.

Reducción a la unidad

Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad en la tabla de valores correspondientes. Conociendo ese dato, no hay dificultad en completar cualquier otro par de valores correspondientes.



Regla de tres

Se ordenan los datos y la incógnita.

| MAGNITUD A | MAGNITUD B |
|------------|------------|
| a          | b          |
| c          | d          |

Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Se calcula el término desconocido en la proporción.

La constante de proporcionalidad

En una tabla de proporcionalidad directa, el cociente de dos valores correspondientes es siempre el mismo.

Al valor de ese cociente se le llama **constante de proporcionalidad**.

- Un coche ha tardado 42 minutos en recorrer 70 km. Suponiendo que va a la misma velocidad, contesta a las siguientes cuestiones:
  - ¿Cuánto tardará en recorrer 150 km?
  - ¿Cuántos kilómetros recorrerá en dos horas y tres minutos?
- Marta ha cobrado por repartir propaganda durante cinco días 126 €. ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar 340,2 €?
- En un plano de una ciudad, una calle de 350 metros de longitud mide 2,8 cm. ¿Cuánto medirá sobre ese mismo plano otra calle de 200 metros?. Calcular escala
- En una panadería, con 80 kilos de harina hacen 120 kilos de pan. ¿Cuántos kilos de harina serían necesarios para hacer 99 kilos de pan?
- Ana medía 1,42 m a principios de año. Pasados tres meses, medía 1,45 y a finales de año, 1,51. ¿Cuándo creció más rápido, en los primeros tres meses o en el resto del año?
- En el equipo de fútbol del barrio han jugado como porteros Ángel y Diego. A Ángel le han marcado 13 goles en 10 partidos jugados. Diego jugó 15 partidos y le marcaron 18 goles. ¿Cuál de los dos ha tenido mejores actuaciones?
- Tres fotografías valen 5 euros, 6 fotografías cuestan 9 euros. Razona si el número de fotografías es directamente proporcional a su precio.

### MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

En las magnitudes inversamente proporcionales, si se multiplica (o divide) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por dicho número.

|            |     |             |             |
|------------|-----|-------------|-------------|
| MAGNITUD A | $a$ | $a \cdot 3$ | $a : 5$     |
| MAGNITUD B | $b$ | $b : 3$     | $b \cdot 5$ |

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

Tablas de proporcionalidad inversa

El producto de dos valores correspondientes es siempre el mismo. Al valor de ese producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Reducción a la unidad

Buscar el valor asociado a la unidad, teniendo en cuenta lo anterior

Regla de tres inversa

Aplicaremos la regla de tres, pero para construir la proporción invertiremos la razón de los valores en una de las magnitudes.

8. Cuatro palas excavadoras hacen un trabajo de movimiento de tierras en 14 días. ¿Cuánto se tardaría en hacer ese mismo trabajo si se dispusiera de 7 palas excavadoras?
9. Un coche, a 90 km/h, hace un recorrido en 5 horas. ¿Cuánto tiempo ganaría si aumentara su velocidad en 10 km/h?
10. Una empresa de confección debe entregar un pedido en 12 días. Para poder cumplir el encargo debe fabricar 2 000 prendas diarias. Sin embargo, sufre una avería que detiene la producción durante dos jornadas. ¿Cuántas prendas deberá fabricar diariamente para enfrentarse a esta nueva situación?
11. Una moto que va a 100 km/h necesita 20 minutos en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad ha de llevar para hacer el recorrido en 16 minutos?
12. Un ganadero tiene 20 vacas y pienso para alimentarlas durante 30 días. ¿Cuánto tiempo le durará el pienso si se mueren 5 vacas?
13. Si 10 grifos tardan 12 horas en llenar un depósito de 15 metros cúbicos, ¿cuánto tardarán 8 grifos en llenar otro depósito de 7 metros cúbicos?
14. Una persona leyendo 4 horas diarias a razón de 15 páginas por hora tarda en leer un libro de 10 días. Si leyendo a razón de 12 páginas por hora tardase 20 días. ¿Cuántas horas diarias leerían?
15. Ocho bombillas iguales encendidas durante 4 horas diarias han consumido 30 días, 49 kilowatios. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas encendidas 3 horas diarias, durante 20 días.
16. Transportar 720 cajas de libros 240 km cuesta 4320 €. ¿Cuántas cajas iguales se han transportado a 300 km si hemos pagado 6187,5€?

### PROPORCIONALIDAD COMPUESTA.

Llamamos problemas de proporcionalidad compuesta a aquellas situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes ligadas por la relación de proporcionalidad. Para resolverlo seguimos los siguientes pasos:

- ✓ Identificamos el tipo de proporcionalidad que relaciona cada magnitud con la que tiene el dato desconocido.
- ✓ Operamos hasta conseguir la unidad en las magnitudes de las que conocemos todos los datos.
- ✓ Operamos para obtener el dato desconocido y su relación con los conocidos.

17. Si 10 grifos tardan 12 horas en llenar un depósito de 15 metros cúbicos, ¿cuánto tardarán 8 grifos en llenar otro depósito de 7 metros cúbicos?
18. El alquiler de 3 coches para 7 días cuesta 630 euros. ¿Cuántos coches se podrán alquilar con 900 euros durante 5 días?
19. Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas?
20. En una fábrica 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas. ¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas?
21. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios empleando 3 horas al día?
22. Una pieza de tela de 2,5 m de larga y 80 cm de ancha cuesta 30 €. ¿Cuánto costará otra pieza de tela de la misma calidad de 3 m de larga y 1,20 m de ancha?
23. Si 5 máquinas tejen en 6 horas 60 jerseys, ¿cuántas máquinas se necesitarán para hacer 100 jerseys en 5 horas?
24. Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles. ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días?
25. Cinco fuentes abiertas 8 horas y manando 12 litros cada minuto llenan completamente un estanque. ¿Cuántas fuentes debemos abrir para llenar el mismo estanque en 6 horas y manando 20 litros cada minuto?
26. Si con 4 grifos de agua de diámetro 2cm se obtienen 300 litros en determinado tiempo, ¿cuántos litros se obtienen en el mismo tiempo con 2 grifos de 3cm de diámetro?
27. Se sabe que 6 mangueras abiertas durante 3 horas equivalen a 10.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar una piscina de 130.000 litros con 4 de estas mangueras?
28. Un equipo de 8 programadores trabajará 6 horas diarias para desarrollar un software en un año. Si se forma un equipo de 10 programadores trabajando 4 horas diarias, ¿cuántos años se necesitan para realizar un proyecto de la misma envergadura?

29. El estadio Azteca de la Ciudad de México tiene una superficie de 7.140 metros cuadrados. Para cortar su césped se emplean 3 máquinas cortacésped funcionando durante 5 horas. ¿Cuánto tiempo se requiere para cortar el césped de un estadio cuya superficie sea la mitad si se emplean 7 máquinas?
30. Una compañía dispone de 5 máquinas de refresco que llenan 280 botellas que se venden por un total de 400 dólares. Si la compañía compra 3 nuevas máquinas embotelladoras para ganar un total de 550 dólares, ¿cuántas botellas deben llenar?
31. John y Paul tienen una banda y componen 6 canciones en 15 días. Si llaman a su amigo George para que les ayude durante 5 días, ¿cuántas canciones compondrán?
32. Un atleta corrió 2 horas diarias durante 30 días y adelgazó 5 kilos. Si corriera solamente 20 días, pero lo hiciera por 3 horas, ¿cuántos kilos perdería?
33. Cuatro empleadas de una tienda de moda tardan 8 días en coser 6 vestidos. Calcular cuánto tiempo se necesita para coser 24 vestidos si se duplica la plantilla.
34. Un buque de carga realiza un transporte en 24 días con tan solo 3 motores encendidos con un consumo total de 2.000L de fuel. Si se encienden sus 6 motores para realizar un transporte con un consumo total de 3.000L, ¿cuánto dura el transporte?
35. Un novelista que escribe 15 páginas en 90 minutos a una velocidad de 22 palabras por minuto necesita escribir 10 páginas cada 75 minutos para terminar su libro dentro del plazo. ¿Cuántas palabras por minuto debe escribir? ¿Cuántas palabras tiene una página?
36. El año pasado, una empresa cubana de producción de azúcar contrató 20 operarios que recolectaron al día una media de 100kg de caña por persona en dos semanas de recolecta. Calcular cuántos operarios deben contratar este año para que en una semana recolecten 2.000 kilos en total.
37. Una empresa cuenta con un equipo de 3 técnicos que pueden reparar los 6 elevadores del edificio en tan solo 180 minutos en caso de avería. Si se necesita reparar 5 elevadores, pero uno de los técnicos no podrá asistir, ¿cuánto tiempo tardarán en repararlos?

### REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

Para repartir una cantidad,  $C$ , en partes directamente proporcionales a  $m, n, k$  :

- ✓ Se divide la cantidad a repartir,  $C$ , entre la suma  $S = m + n + k$ . Así, calculamos la parte,  $p$ , que corresponde a una unidad.
- ✓ Se multiplica cada número  $m, n, k$ , por el cociente,  $p$ , obtenido.

|          |     |     |     |                 |                               |   |
|----------|-----|-----|-----|-----------------|-------------------------------|---|
| NÚMEROS  | $m$ | $n$ | $k$ | $m + n + k = S$ | $\rightarrow p = \frac{C}{S}$ | $\begin{cases} x = p \cdot m \\ y = p \cdot n \\ z = p \cdot k \end{cases}$ |
| CANTIDAD | $x$ | $y$ | $z$ | $C$             |                               |   |

38. En una determinada carrera se destina 330 euros para repartir entre los tres corredores que acaban en los tres primeros puestos de manera proporcional al puesto que ocupan. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de los tres clasificados?
39. Tres almacenistas de madera, importan conjuntamente de guinea madera por valor de 24300€. El primero se queda con 210 m<sup>3</sup>, el segundo con 330 m<sup>3</sup> y el tercero con 270 m<sup>3</sup>. ¿Cuánto debería pagar cada uno?
40. En las fiestas de verano del pueblo se celebra una carrera, para la cual se destinan 110 € a repartir entre los tres corredores que acaben en los tres primeros lugares de manera inversamente proporcional al puesto que ocupa. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de los tres clasificados?
41. Tres socios, Antonio, José y Ana pusieron para crear una empresa 5000, 8000 y 10000 euros respectivamente. Tras un tiempo la empresa tiene 2300 euros de beneficios. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?
42. Reparte 115 € en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3.
43. Un padre reparte 750 € entre sus tres hijos en partes directamente proporcionales a 2, 1/5 y 8/5. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
44. Tres amigos invierten en un negocio las siguientes cantidades: Juan deposita 6000 €, Luis 4500 € y Pedro 8500 €. Si en el primer año han tenido un beneficio de 2000 €. ¿Qué beneficio corresponde a cada uno?
45. Reparte 450 de forma directamente proporcional a 25, 50 y 75.
46. Reparte 10 650 en proporción directa a 3, 5 y 7.

47. Un padre quiere repartir 140 sellos entre sus dos hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 13 y 15 años. ¿Cuántos sellos recibirá cada uno?

### REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

Para repartir una cantidad, C, en partes inversamente proporcionales a m, n, k, se reparte en partes directamente proporcionales a los inversos,  $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{k}$

48. En una carrera de motos el primer clasificado ha tardado 1 hora y media, el segundo 4 minutos más que el primero y el tercero 2 minutos más que el segundo. Si el premio es de 900 €, ¿cómo debemos repartir el dinero entre los tres clasificados?
49. Quiero repartir 575 € entre mis tres hermanos, de forma inversamente a proporcional a sus edad, que son 6, 19 y 22 años. ¿Cuánto tengo que entregarle a cada uno?
50. Un club de fútbol va a repartir 25000 € entre tres peñas de socios. El reparto se hará de forma inversamente proporcional, de modo que a mayor número de socios, menor cantidad recibirán del club. Si las peñas tienen 150, 300 y 450 socios respectivamente, ¿cuánto le corresponde a cada una?
51. Los dos camareros de un bar se reparten al final de mes un bote con 136 euros de propina de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado. Si uno ha faltado 3 días y otro 5, ¿cuántos euros corresponde a cada uno?
52. Según un testamento, una fortuna de 65000 euros, se reparte entre tres personas en partes inversamente proporcionales al sueldo de cada una de ellas. Si los sueldos de estas personas son de 900, 1350 y 1800 euros, ¿cuánto le corresponde a cada una?
53. En una competición se van a repartir 174 puntos entre cinco participantes, en orden inversamente proporcional al tiempo que tardan en realizar la prueba. Si los participantes tardan 4, 6, 8, 10 y 12 minutos respectivamente, ¿cuántos puntos le corresponde a cada uno?
54. Tres amigos se reparten una pizza de forma inversamente proporcional a sus pesos que son respectivamente 60, 72 y 90 kilogramos. ¿Qué parte de pizza se debe comer cada uno?

55. Un profesor entrega una relación de 86 ejercicios a cuatro alumnos para que se los repartan con la condición de que cada uno resuelva una cantidad inversamente proporcional a las calificaciones obtenidas en un examen. Las calificaciones han sido 2, 4, 5 y 8. ¿Cuántos ejercicios debe resolver cada uno?

### PORCENTAJES.

Un porcentaje se puede contemplar como:

- ✓ Proporción: Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el tanto y se divide entre 100.

$$a \% \text{ de } C = \frac{C \cdot a}{100}$$

- ✓ Fracción: Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad.

$$a \% \text{ de } C = \frac{a}{100} \text{ de } C = \frac{C \cdot a}{100}$$

- ✓ Número decimal: Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

### AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

- ✓ Para calcular un aumento porcentual, se suma al 100% el porcentaje que se incrementa:  
 $\uparrow a\% \text{ equivale a calcular } (100 + a)\% \text{ de dicha cantidad.}$
- ✓ Para calcular una disminución porcentual, se resta al 100% el porcentaje que se reduce:  
 $\downarrow a\% \text{ equivale a calcular } (100 - a)\% \text{ de dicha cantidad.}$

56. Una máquina, A, fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina, B, fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos.

- ¿Cuál es el porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por cada máquina?
- ¿Cuál de las dos máquinas trabaja mejor?

57. Un análisis realizado en una granja a 7 200 animales ha permitido detectar un 24 % de animales enfermos. Se emplea como tratamiento una dosis de vitamina A en 2 de cada 3 animales. ¿Cuántas dosis de vitamina A se necesitan?

58. Aumenta las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

- 134 en un 8 %.
- 45,76 en un 12 %.
- 563 en un 17,3 %.
- 96,3 en un 0,4 %.

59. Disminuye las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

- 54 en un 5 %.
- 98,7 en un 79 %.
- 62 en un 9,6 %.
- 2 369,83 en un 0,68 %.

60. La cantidad de 12 500 se incrementa primero en un 12 % y el resultado se vuelve a incrementar en otro 4 %. ¿Cuál es la cantidad final resultante?



61. El precio de una bicicleta es 175 euros. En rebajas hacen un descuento del 25 %, pero además, hay que pagar el 16 % de IVA. ¿Cuánto cuesta entonces?
62. ¿Es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 % que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3%?
63. Los productos de cierta empresa subieron un 10 % en 2002 y un 12 % en 2003, y bajaron un 4 % en 2004. ¿Cuál fue el porcentaje de variación de los precios en esos tres años?
64. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?
65. Una moto cuyo precio era de 5.000 €, cuesta en la actualidad 250 € más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?
66. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 €, nos hacen un descuento y pagamos 8000€ ¿qué porcentaje del coche hemos pagado?, ¿Qué porcentaje nos han descontado?.
67. Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha ascendido a 180 € para ganar al venderlo el 10%.
68. ¿Qué precio de venta hemos de poner a un artículo comprado a 280 €, para perder el 12% sobre el precio de venta?
69. Se vende un objeto perdiendo el 20% sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de 150 €
70. Calcular el sueldo actual de 3 trabajadores que hace 4 años entraron a trabajar en una empresa y que sufrieron las siguientes variaciones de sueldo: el primer año subió un 3%, el segundo bajo un 5%, y el último subió un 1% sabiendo que entraron a trabajar con los sueldos de 1200€, 2000€ y 1400€. ¿Cuál ha sido la variación porcentual en estos 3 años?
71. El precio de dos productos de una tienda costaban inicialmente sin IVA de 12€, 15€. Si estamos en las segundas rebajas y las primeras fueron del 15% y las segundas del 20% y el IVA es de 21%. Calcular el precio de los productos después de las segundas rebajas. ¿Cuál es la variación porcentual del precio inicial sin IVA y el actual?

72. Si hay un aumento porcentual inicial del 10% y una bajada posterior del 3% y al revés una bajada inicial del 3% y un aumento posterior del 10%. ¿El resultado es el mismo? Calcular en cada ejemplo la variación porcentual total.

### INTERÉS BANCARIO.

Se llama interés al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo. Un capital,  $C$ , colocado al  $r$  % anual durante  $t$  años produce un beneficio  $I$ .

| <u>CAPITAL</u> |   | <u>TIEMPO</u> |   | <u>INTERÉS</u> |
|----------------|---|---------------|---|----------------|
| 100            | → | 1             | → | $r$            |
| $C$            | → | $t$           | → | $I$            |

$\left. \begin{array}{l} \text{P. DIRECTA} \\ \text{P. DIRECTA} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{C} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{I} \rightarrow I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$

73. Calcula el interés de 3400 euros al 5 % durante 3 años.
74. ¿Cuánto nos rentarán 8000 euros durante 10 años al 7,5 % ?
75. Halla el interés de 2550 euros colocados al 4 % durante 4 meses
76. ¿Qué capital produce 2000 € de interés si ha estado en el banco 4 años al 4%?  
Una persona ha puesto 10300 euros en unos bonos del Estado al 6,5 % durante 4 años. Después de ese tiempo ¿cuánto dinero tendrá?
77. Un amigo tenía 4500 euros y los puso en un Banco al 3,5 % durante 50 meses.  
¿Cuánto suma el capital más los intereses?
78. ¿Cuánto devolverá Juan a un Banco por un préstamo de 14000 euros al 5,5 % durante 7 años?
79. Pedro pidió un préstamo para iniciar un negocio con un capital de 16 000 euros al 4,5 % durante 3 años. ¿Cuánto tendrá que devolver al Banco?
80. He pedido un préstamo de 2350 euros al 6 % durante 5 años. ¿Qué interés tendré que pagar?
81. Juan pidió un préstamo para comprar un piso, de 120000 euros al 6,75 % durante 15 años. ¿Cuánto pagará por los intereses?
82. Encuentre el interés simple sobre 1.250 euros para 2 años al 5%.
83. ¿En cuánto tiempo 500 euros se acumularán a 525 euros al 4% de interés simple?
84. Encuentre el interés simple sobre 285 euros para un año y medio al 4 %.