TEMA 5: ÁLGEBRA

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos entre sí por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y/o por paréntesis.
Las letras representan valores que no conocemos y las llamamos **variables.**

Ejemplo 1:

Lenguaje usual	Lenguaje algebraico
El doble de la suma de dos números	2· (x + y)
Mi edad dentro de siete años	x+ 7
Perímetro de un cuadrado	4·L

EJERCICIOS:

1. Expresa en lenguaje algebraico las siguientes expresiones:

a) El triple de un número.
b) La mitad de la suma de dos números.
c) El siguiente de un número.
d) Un número par.
e) El producto de un número impar con el siguiente impar.
f) El área de un triángulo.
g) El perímetro de un rectángulo.
h) La suma de dos números menos su producto.
i) Un número entero menos el triple del anterior.
j) La quinta parte de la diferencia de dos números menos uno.
k) El cubo de un número más la mitad de dicho número.

2. Inventa un enunciado para estas expresiones:

a) 2·(n - m) b) a + 2·a c) $(x+1)^2$

d) 2·y +1 e) 2·(y+1) f) $\frac{b-1}{2}$

3. **Completa con expresiones algebraicas**:

a) Raúl pesa x kilos ………………..

b) Rosa pesa cuatro kilos más que Raúl……………

c) Jorge pesa el doble que Raúl…………..

d) Ana pesa cuatro kilos menos que Jorge…………..

VALOR NUMÉRICO

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

Ejemplo 2:

Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas en los valores indicados:

a) **$x^2 + 2x – 3$ para x= 5**

Sustituimos en la expresión la x por 5: $5^2 + 2·5 – 3$
Resolvemos las operaciones: 25 + 10 - 3 = **32**

Luego el valor numérico de esa expresión algebraica en x=5 es 32

b) **$2xy - y^3 + 5x$ para x =2 e y = -1**
Sustituimos en la expresión la x por 2 y las y por (-1): $2·2·(-1) – (-1)^3+ 5·2$
Resolvemos las operaciones: - 4 +1 +10 = **7**

Luego el valor numérico de esta expresión algebraica en x=2 e y = -1 es 7

EJERCICIOS

1. **Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas en los valores que se indican:**

	En x = 2	**En x = $\frac{1}{2}$**	**En x= - 1**	**En x = 0**
$x^2 – x – 6$				
$2x^3 - 3x^2 + x - 30$				
$x^4 – 8x^2 +16$				

2. **Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas en los valores indicados:**

a) $8x^3y^2z$ para x=1, y=4 , z=2

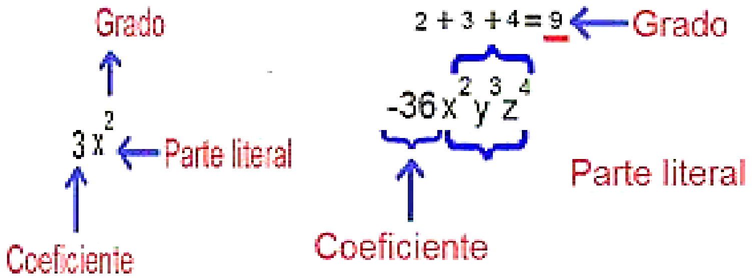
b) $\frac{6}{5}x^2y - 4xy^3$ para x=1, y = -1

c) $-4bc^2 + 3b^4$ para b=1 y c= - 2

MONOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o varias variables elevadas a exponentes naturales. Al número se le denomina **coeficiente**, y a las letras con sus exponentes, **parte literal**.

El **Grado de un monomio** es la suma de todos los exponentes de su parte literal.



Dos **monomios** son **semejantes** cuando tiene la misma parte literal

$-3x^2z$ **$6x^2z$** **$5xz^2$**

Son semejantes ***No** son semejantes*

EJERCICIOS

1. **Completa la siguiente tabla:**

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$-8xyz^2$			
$3x^2b^4$			
	$\frac{2}{5}$	bc^2	
	-4	x^3y^2	

2. **Escribe tres monomios semejantes a los monomios dados:**

a) $6x^2yz$ b) $\frac{3}{5}a^3$ c) $-5nb^5$

3. **Relaciona con flechas los monomios semejantes:**

$2x^3y$ $7xy^2$

$-3x^4y^2$ $-\frac{2}{7}x^3y$

$-\frac{2}{7}xy^2$ $5yx^3$

OPERACIONES CON MONOMIOS

SUMA Y RESTA: Sólo podemos sumar o restas monomios semejantes. Para ello, sumamos o restamos los coeficientes y dejamos la misma parte literal. Si los monomios no son semejantes, la suma o resta quedaría indicada.

$5a + 2a = (5 + 2)\,a = 7a$

$8x^2 - 3x + x^2 = (8 + 1)\cdot x^2 - 3x = 9x^2 - 3x$, *sólo sumamos los semejantes*

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN MONOMIO: Se multiplica el número por el coeficiente y se deja la misma parte literal.

$$(-3) \cdot (5\,x^2y^4) = -15\,x^2y^4$$

PRODUCTO DE MONOMIOS: El producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo <u>coeficiente</u>, es el producto de los coeficientes, y cuya <u>parte literal</u> es, las letras de los monomios, sumando los exponentes de los factores de igual base.

$$(2x^2y)\cdot(-3y^3z) = -\,6x^2y^4z$$

POTENCIA: Elevamos al exponente el coeficiente y cada una de las variables.

$$(-2x^2y^3)^3 = (-2)^3\cdot (x^2)^3\cdot(y^3)^3 = -\,8\cdot x^6y^9$$

DIVISIÓN: El cociente de dos monomios tiene como <u>coeficiente</u> el cociente de los coeficientes, y como <u>parte literal</u>, las letras de los monomios restando los exponentes de las variables de igual base.

El cociente de dos monomios no siempre es otro monomio, puede ser:

Un número $(2a^2b) : (3a^2b) = \frac{2\cancel{a^2}\cancel{b}}{3\cancel{a^2}\cancel{b}} = \frac{2}{3}$

Un monomio $(15x^4) : (3x^3) = \frac{15x^4}{3x^3} = \frac{15}{3}\cdot\frac{x^4}{x^3} = 5x$

Una fracción algebraica $(2ab) : (6b^2) = \frac{2ab}{6b^2} = \frac{\cancel{2}a\cancel{b}}{\cancel{2}\cdot 3b\cancel{b}} = \frac{a}{3b}$

EJERCICIOS

1. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $3x + 2x$

b) $6x^2 - 5x^2 + 2x^2$

c) $7x^3 - 14x^3$

d) $8x + \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}x$

e) $5bc^2 + 3bc^2 - 4bc^2$

f) $3x \cdot 2x$

g) $(-5) \cdot 9b^2a$

h) $5x^3 \cdot 4x^2$

i) $(-2\ a^3) \cdot 7$

j) $4xy \cdot 2x^2y$

k) $xy^2z \cdot 3xyz \cdot 4x^2y$

l) $\frac{1}{3}x^4 \cdot 2x^2 \cdot x$

m) $12x^6 : 3x^3$

n) $-24\ x^4y^2 : 2xy$

ñ) $3x^5 : 3x^5$

o) $18x^3 : 3x^6$

p) $20a^8b^4 : (-5\ a^5b^3)$

q) $21\ n^3m : 7n^3m$

r) $\frac{7}{9}x^3y^2a : 3xy^3$

s) $\frac{7}{9}x^3y^2a \cdot 3xy^3$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(3x^2)^3$

b) $(-5\ a^3b)^2$

c) $\left(\frac{3}{2}\ nm^4\right)^4$

d) $(-3x^4y^3z)^5$

e) $(3x^4y^0)^{-1}$

f) $(2x)^{-2}$

g) $(-3ab^2x^3)^2$

3. Calcula y simplifica:

a) $[(-3x^5)^3]^2$

b) $(-4x^2y) \cdot (3xy^2) : (-2xy)$

d) $\dfrac{15x^5b^3c^3}{-5x^2bc}$

POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios.
– Cada uno de los monomios que lo forman se llaman **términos** del polinomio.
(Un polinomio se clasifica según el número de términos que tenga:
monomio – uno, Binomio- dos, trinomio-tres y a partir de cuatro- polinomio)
– El término que no tienen parte literal se denomina **término independiente**.
– El **grado** de un polinomio es el del monomio de mayor grado.

Grado

$$P(x) = 6x^4 - 5x^2 + \frac{3}{5}x - 7$$ ⟵ Término independiente

Polinomio con 4 términos

OBSERVA:

Si faltan términos de algún grado se dice que es incompleto: $P(x)= 2x^5 - 4x^3 + 2$
Si no faltan términos es un polinomio completo: $Q(x)= 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x + 2$
Para trabajar con polinomios es conveniente ordenarlos de mayor a menor grado.

EJERCICIOS

1. **Completa la siguiente tabla:**

POLINOMIO	COEFICIENTES	VARIABLES	GRADO	TÉRMINO INDEPENDIENTE
$5x^2 - 2x - 3$				
$4x^3 + 5x^5 + 2 - 10x^2$				
$-3xy^2 + 5x^3y + xy$				
$4 - a^2b^4c - ab^4c^3$				

2. **Escribe polinomios con las siguientes condiciones, indicando si son completos o incompletos y ordenados:**

a) Escribe un binomio de grado 4 cuyo término independiente sea negativo.

c) Un polinomio de grado mayor que 3, con tres términos.

d) Un polinomio de grado cero.

e) Un polinomio de grado 6, con dos variables, cuatro términos y sin término independiente.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Sean $P(x)= 3x^2 – 7x + 2$, $Q(x)= -2x^2 + 4x$ y $R(x) = 16x^4 – 12x^3 +18x^2$

SUMA Y RESTA:

Se suman o restan los coeficientes de los términos semejantes.

En la resta, debemos cambiar los signos de todos los términos del polinomio que queremos restar antes de operar.

$P(x) + Q(x) = (3x^2 – 7x + 2) + (-2x^2 +4x) = 3x^2 –7 x + 2 - 2x^2 +4x = x^2 –3 x +2$

$P(x) - Q(x) = (3x^2 – 7x + 2) - (-2x^2 +4x) = 3x^2 –7 x + 2 + 2x^2 - 4x = 5x^2 –11 x +2$

Afecta a todos los signos del paréntesis

PRODUCTO:

POR UN NÚMERO, multiplicamos dicho número por todos los coeficientes del polinomio.

$5 \cdot P(x) = 5\cdot (3x^2 – 7x + 2) = 15x^2 – 35x +10$

POR UN MONOMIO, multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$(-3x^2) \cdot Q(x) = (-3x^2) \cdot(-2x^2 +4x) = (-3x^2)\cdot(-2x^2) + (-3x^2)\cdot(4x) = 6x^4 – 12x^3$

POR OTRO POLINOMIO, multiplicamos cada monomio del primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo polinomio, y sumamos o restamos los monomios semejantes obtenidos.

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 – 7x + 2) \cdot (-2x^2 +4x) = (3x^2 –7 x + 2)\cdot(- 2x^2)+ (3x^2 –7 x + 2)\cdot4x$ $= - 6x^4 +14x^3- 4x^2 +12x^3- 28x^2 +8x = - 6x^4 +26x^3- 32x^2 +8x$

DIVISION POR UN MONOMIO: Dividimos cada término del polinomio entre el monomio.

$R(x) : (-2x^2) = (16x^4 – 12x^3 +18x^2) : (-2x^2) =$

$= (16x^4) : (– 2x^2)+ (– 12x^3) : (-2x^2) + (18x^2) : (-2x^2) =$

$= - 8 x^2 + 6x - 9$

EJERCICIOS

1- Dados los polinomios **$A(x) = 5x^4 - 7x^3 + 5x - 1$,**
$B(x) = -4x^3 - 3x^2 + 3x + 6$
$C(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$,

Calcula:

a) A(x) + B (x)
b) A(x) + C(x)
c) C(x) – B(x)
d) A(x) – C(x)
e) A(x) +B(x) +C(x)
f) A(x) – B(x) + C(x)
g) A(x) – [B(x) + C(x)]
h) C(x) – [B(x) – A(x)]
h) 2·B(x) – C(x)

2- Resuelve las siguientes multiplicaciones:

a) $6\cdot (x^3 - 5x^2 - 3x + 2)$
b) $(-3)\cdot(-5x^4 - 3x^2 + 7x - 12)$
c) $x^3\cdot (-2x^5 + 3x^3 - 5x + 8)$
d) $(-x^3)\cdot (-2x^5 + 3x^3 - 5x + 8)$
e) $(5x^2 - 6x + 11) \cdot (-10x^2)$
f) $\left(\frac{3}{2}x^2\right)\cdot(4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 12)$
g) $\left(\frac{2x^2}{3}\right)\cdot(9x^3 + 6x^2 - 15x)$
h) $(3x^2 - 2x - 3)\cdot (x+2)$
i) $(x^2 - 5x)\cdot(3x^3 + 5x^2 - x + 10)$
j) $(2x^2 - 8x + 3)\cdot(5x^2 - 7x + 2)$
k) $(2x^3 - 5x^2 - 3x - 6)\cdot(6x^4 - 2x + 4)$
l) $(4x^2 - x - 3)\cdot\left(3x + \frac{1}{2}\right)$
m) $(10x^4 - 20x^3 + 40x^2 + 15x + 5)\cdot\left(\frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}\right)$

3- Calcula las siguientes divisiones entre monomios:

a) $(x^3 - 6x^2 + 2x) : x$
b) $(6x^8 + 12x^5) : (3x^3)$
c) $(30x^6 - 25x^5 - 20x^4 + 5x^3) : (-5x^3)$
d) $(-36x^{12} + 24x^8 - 48x^4) : (-12x^4)$
e) $(x^4 + 6x^3 - 7x^2) : 3x$
f) $(13x^7 + 2x^6 - 19x^5) : (-x^3)$
g) $(x^4 + 6x^3 - 7x^5) : \left(-\frac{2}{5}\right)$
h) $\left(\frac{2}{3}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - 2x^2\right) : \frac{4}{3}x$

4- Realiza las siguientes operaciones con los polinomios:
$P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ **$Q(x) = -2x^2 + 3x - 5$** **$R(x) = 2x^2 - 7$**

a) 2·P(x) – 3·Q(x)
b) R(x)· [Q(x) + P(x)]
c) P(x) – P(x)·R(x)
d) [P(x) – Q(x)]· R(x) + 3·Q(x)

EXTRAER FACTOR COMÚN

Dado el polinomio $\mathbf{P(x) = 8x^4 + 4x^3 - 16\,x^2}$

Todos sus términos son múltiplos de $4x^2$, por lo que podemos escribirlo como:

$$\mathbf{P(x) = 4x^2 \cdot 2x^2 + 4x^2 \cdot x - 4\,x^2 \cdot 4}$$

Luego, todos los términos, tienen un factor común que podemos extraer y escribirlo como:

$$\mathbf{P(x) = 4x^2 \cdot (2x^2 + x - 4)}$$

EJERCICIOS

1. Extrae factor común de las siguientes expresiones:

a) $7x + 5x - 3x + 2x$

b) $8a - 9a - a$

c) $5x^2 - 3x$

d) $4x^2 - 2x^2$

e) $9x^3 - 5x^2 + 3x$

f) $10\,x^6 - 6\,x^2$

g) $2ab^2 - 5\,a^2b + 10\,ab$

h) $7x^2y - 3xy + 8y$

i) $5\,a + 5b - 5c$

j) $x^5 - 3x^3$

k) $12x^2y - 15\,xy^2$

l) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 9x$

m) $16x^2y^7 - 8x^9y^6 + 20x^3y^8$

PRODUCTOS NOTABLES

Cuadrado de una suma:	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
Cuadrado de una diferencia:	$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
Suma por diferencia:	$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

EJERCICIOS

1. Calcula aplicando los productos notables:

a) $(x + 2)^2$

b) $(x - 3)^2$

c) $(2x + 1)^2$

d) $(5x - 2)^2$

e) $(y - 3) \cdot (y + 3)$

f) $(7x^2 + x)^2$

g) $(3a - b)^2$

h) $(5n - m^3) \cdot (5n + m^3)$

i) $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$

j) $(6x^3 - 5x^2)^2$

k) $\left(\frac{3}{4}a^4 + 8a^2\right)^2$

l) $\left(x + \frac{1}{10}y^5\right) \cdot \left(x - \frac{1}{10}y^5\right)$

2. Escribe como producto notable:

a) $9x^2 - 4$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $9x^6 - 12x^5 + 4x^4$

d) $\frac{100}{49}x^2 - \frac{1}{9}y^4$

e) $100x^4 + 100x^2 + 25$

3. Desarrolla, opera y simplifica:

a) $(5x+2)^2 - (5x - 2)^2$

b) $(3x^2 + x) \cdot (3x^2 - x) - (3x^2 - x)^2$

c) $(a - b)^2 - (a + b)^2 + (a + b) \cdot (a - b)$