





## PROPORCIONALIDAD

### RAZÓN entre dos números:

Llamamos razón entre dos números  $a$  y  $b$  al cociente  $\frac{a}{b}$ .

El número  $a$  se llama antecedente y el  $b$ , consecuente.

En una fracción  $\frac{a}{b}$ , los números  $a$  y  $b$  son enteros. En una razón no es necesario.

Ejemplo: En una clase hay 7 chicos y 12 chicas. La relación numérica entre chicos y chicas es de 7 a 12. Se expresa mediante la razón  $\frac{7}{12}$

### PROPORCIÓN

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Si la razón de  $a$  y  $b$  es  $\frac{a}{b}$  y entre  $c$  y  $d$  es  $\frac{c}{d}$ ,

y se cumple que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , decimos que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  forman una proporción.

En esta proporción,  $a$  y  $d$  se llaman **extremos** y  $b$  y  $c$ , **medios**.

Dos razones forman una proporción si el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

1. Comprueba si las siguientes razones forman una proporción:

a)  $\frac{3,2}{5,1}$  y  $\frac{6,4}{10,2}$

b)  $\frac{2,3}{3}$  y  $\frac{3,3}{4}$

2. Calcula el término que falta para que las siguientes razones formen una proporción:

a)  $\frac{x}{8}$  y  $\frac{10}{16}$

b)  $\frac{x}{4,2}$  y  $\frac{5,1}{8,4}$

c)  $\frac{28}{42}$  y  $\frac{50}{x}$

d)  $\frac{1,2}{3,4}$  y  $\frac{x}{1,7}$

3. En el comedor de un colegio ponen 3 barras de pan por cada 8 alumnos. Hoy han comido 124 alumnos y han puesto 50 barras. ¿Se ha mantenido la proporción?

4. Escribe la proporción  $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$  de otra forma y comprueba que sigue siendo una proporción.

### RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

Llamamos magnitud a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Por ejemplo, son magnitudes el peso o el precio de un objeto.

A veces, entre las magnitudes, se dan relaciones, como la de proporcionalidad, que son muy útiles para la resolución de algunos problemas.

#### MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

La constante de proporcionalidad es el cociente de cualquiera de las razones de dos cantidades proporcionales correspondientes.



Magnitud A	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_n$
Magnitud B	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_n$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = c$$

Ejemplo: Un bolígrafo vale 0,50€. La relación entre el número de bolígrafos y su coste es directamente proporcional.

Número de bolígrafos	1	2	3	4	5
Coste (€)	0,50	1	1,5	2	2,5

Y por ser magnitudes directamente proporcionales, se cumple:

$$\frac{1}{0,5} = \frac{2}{1} = \frac{3}{1,5} = \frac{4}{2} = \frac{5}{2,5} = 2 = \text{constante de proporcionalidad}$$

5. ¿Son directamente proporcionales estas magnitudes?

- El peso de una sandía que compras y su precio.
- El precio de una entrada de cine y el tiempo que dura la película.
- La edad de una persona y su altura.
- El tiempo que un vehículo está en marcha, con velocidad constante, y la distancia recorrida.
- El precio de un libro y su número de páginas.
- La cantidad de litros de gasolina que caben en el depósito de un coche y la cantidad de dinero necesario para llenarlo.

6. Copia y completa la tabla en tu cuaderno, haciendo corresponder el número de terrones de azúcar y su peso en gramos:

Número de terrones	1	2	3	5	10
Peso (g)	5	10			

¿Es de proporcionalidad directa? Explica por qué.

7. Copia y completa la tabla que relaciona el tiempo que está abierto un grifo con la cantidad de agua que arroja:

Segundos	1	2	4	10	20
Litros	0,2				

**PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA: REDUCCIÓN A LA UNIDAD:**

El método de reducción a la unidad consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.

Ejemplo: Tres botes de mermelada cuestan 5,40€. ¿Cuánto cuestan 4 botes?

Con el método de reducción a la unidad, vemos que un bote cuesta:  $5,40 : 3 = 1,80€$ . Conocido ese valor, 4 botes costarán:  $1,80 \cdot 4 = 7,20€$

**PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA: REGLA DE TRES DIRECTA:**

La regla de tres directa consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

MAGNITUD A

MAGNITUD B

a -----> m

b -----> x

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}$$



Ejemplo: Tres botes de mermelada cuestan 5,40€. ¿Cuánto cuestan 4 botes?

Número de botes	Coste (€)
3 ----->	5,40
4 ----->	x

$$\frac{3}{4} = \frac{5,40}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5,40}{3} = 7,20€$$

8. Resuelve por reducción a la unidad:

- Tres chocolatinas pesan 90 gramos. ¿Cuánto pesan 2 chocolatinas?
- Un canguro avanza 12 metros en cuatro saltos. ¿Cuánto avanzará en 10 saltos?

9. Resuelve con una regla de tres:

- He pagado 9,20€ al comprar cuatro chocolatinas. ¿Cuánto habría pagado si hubiera comprado tres?
- Si 100 gramos de salmón ahumado cuestan 2,40€, ¿cuánto costarán 260 gramos?

10. ¿Verdadero o falso?

- Tres barras de pan pesan 300 gramos. Dos barras pesarán 400 gramos.
- Dos kilos de patatas han costado 0,80€. Tres kilos costarán 1,20€
- Por aparcar dos horas pago 3€. Por aparcar media hora pago 0,75€.

### **PROBLEMAS DE REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES:**

Son problemas de reparto directamente proporcional aquellos en los que hay que repartir cierta cantidad de forma proporcional a otras.

Ejemplo: Pedro, Alberto y Sara tenían, respectivamente, 5, 3 y 2 euros. Juntaron su dinero y compraron 500 folios. ¿Cuántos folios recibe cada uno?

Sumamos para obtener que, entre los tres, han puesto un total de 10 euros.

Dividimos la cantidad total de folios, 500, entre el total de euros, 10, para obtener el número de folios correspondiente a un euro:  $500 : 10 = 50$  folios corresponden a un euro.

Por tanto, a cada uno corresponden:

$$\text{Pedro} : 50 \cdot 5 = 250 \text{ folios} \quad \text{Alberto} : 50 \cdot 3 = 150 \text{ folios} \quad \text{Sara} : 50 \cdot 2 = 100 \text{ folios}$$

11. En una campaña de recogida de pilas para reciclar, Yolanda lleva 7 pilas, Miriam 11 y Juan 12. Si como premio ganan 60 bolígrafos, ¿cómo se los repartirán?

12. Tres amigos reciben 450 € por hacer de canguro. Rafa trabajó 3 días, Marina 5 días y Alfredo 7 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

### **MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES**

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

La constante de proporcionalidad es el producto de dos cantidades proporcionales correspondientes.

Magnitud A	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_n$
Magnitud B	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_n$

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n = c$$



**Ejemplo:** Un saco de pienso para un perro dura 30 días. La relación entre el número de perros y el número de días que dura el saco es inversamente proporcional. (Cuantos más perros hay que alimentar, menos dura el saco de pienso).

Número de perros	1	2	3	5	10
Coste (€)	30	15	10	6	3

Y por ser magnitudes inversamente proporcionales, se cumple:

$$1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 10 \cdot 3 = 30 = \text{constante de proporcionalidad}$$

**13.** ¿Son inversamente proporcionales las siguientes magnitudes?

- La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir una determinada distancia.
- La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.
- La edad de una persona y el número de veces que va al médico.
- El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar el cubo.
- La edad de una persona y el número de veces que va al médico.

**14.** Una cuadrilla de limpieza, de cuatro trabajadores, limpia un edificio de oficinas en cinco horas. Copia y completa en tu cuaderno la tabla con los tiempos que tardaría la cuadrilla en hacer el mismo trabajo si tuviera distintos números de trabajadores:

Número de trabajadores	1	2	4	5	10
Tiempo (Horas)			20		

**PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD INVERSA: REDUCCIÓN A LA UNIDAD:**

El método de reducción a la unidad consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.

**Ejemplo:** Dos tractores aran una finca en seis horas. ¿Cuánto tardarán tres tractores en hacer el mismo trabajo?

Con el método de reducción a la unidad vemos que un solo tractor tardará  $2 \cdot 6 = 12$  horas. Por tanto, tres tractores tardarán  $12 : 3 = 4$  horas.

**PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD INVERSA: REGLA DE TRES INVERSA:**

La regla de tres inversa consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita, pero debemos *invertir el orden de los valores en una de las magnitudes*.

MAGNITUD A	MAGNITUD B	
a -----→	m	
b -----→	x	$\frac{b}{a} = \frac{m}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot m}{b}$

**Ejemplo:** Un camión, a 60 km/h, tarda 40 minutos en cubrir un trayecto entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta, descargado, a 80 km/h?

Velocidad (km/h)	Tiempo (min)	
60 -----→	40	
80 -----→	x	$\frac{80}{60} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 40}{80} = 30 \text{ min}$

**15.** Resuelve por reducción a la unidad:

- Tres albañiles pintan una pared en 8 horas. ¿Cuánto tardaría un solo albañil? ¿Y si hubiese dos albañiles? ¿Y si fueran cuatro?
- Un grifo que tiene un caudal de 2,5 litros por minuto, tarda 40 minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si el caudal fuese de 4 litros por minuto?



**16.** Resuelve con una regla de tres:

- a) Un granjero tiene pienso en su almacén para alimentar a 25 vacas durante 18 días. ¿Durante cuánto tiempo podría alimentar con ese pienso a 45 vacas?  
 b) Un coche recorre una distancia en 39 minutos, a una velocidad media de 95 km/h. ¿Cuánto tardará en ese mismo recorrido un camión a una velocidad media de 65 km/h?

**17.** Con una carga de heno se alimenta a tres caballos durante seis días.

Teniendo esto en cuenta, contesta: ¿Verdadero o falso?

- a) A un solo caballo le duraría 18 días.  
 b) Dos caballos consumirían la carga en 9 días.  
 c) Nueve caballos consumirían ese heno en 6 días.  
 d) Si hubiera 6 caballos, la carga de heno duraría 3 días.

## PORCENTAJES

### TANTO POR CIENTO (%) de una cantidad:

Tomar el tanto por ciento o porcentaje de una cantidad equivale a dividir esa cantidad en 100 partes iguales y tomar las partes indicadas en el porcentaje. Es una razón cuyo denominador es 100.

$$x\% = \frac{x}{100}$$

$$x\% \text{ de } N = (N : 100) \cdot x$$

### PORCENTAJES Y PROPORCIONES:

Un tanto por ciento expresa la relación de proporcionalidad existente entre la parte que se toma de un total y el total completo.

Ejemplo: El 20% de las 180 habitaciones de un hotel están vacías. ¿Cuántas habitaciones vacías hay en el hotel?

Habitaciones	----->	%
180		100
x		20

$$\frac{180}{x} = \frac{100}{20} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot 20}{100} = 36 \text{ vacías}$$

### PORCENTAJES Y FRACCIONES:

Para calcular un porcentaje, operamos de la misma forma que lo hacíamos para calcular la fracción de una cantidad.

Ejemplo: El 20% de las 180 habitaciones de un hotel están vacías. ¿Cuántas habitaciones vacías hay en el hotel?

$$20\% \text{ de } 180 = \frac{20 \cdot 180}{100} = 36 \text{ habitaciones vacías}$$

### PORCENTAJES Y NÚMEROS DECIMALES:

Para calcular un porcentaje, podemos operar con el número decimal que resulta de dividir el tanto por ciento entre 100.

Ejemplo: El 20% de las 180 habitaciones de un hotel están vacías. ¿Cuántas habitaciones vacías hay en el hotel?

$$0,2 \cdot 180 = 36 \text{ habitaciones vacías}$$

### ALGUNOS PORCENTAJES “ESPECIALES”:

- El 50%  $\rightarrow \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ . El 50% es la mitad. Para calcular el 50%, se divide entre 2.
- El 25%  $\rightarrow \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ . El 25% es la cuarta parte. Para calcular el 25%, se divide entre 4.
- El 20%  $\rightarrow \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ . El 20% es la quinta parte. Para calcular el 20%, se divide entre 5.
- El 10%  $\rightarrow \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ . El 10% es la décima parte. Para calcular el 10%, se divide entre 10.



18. Calcula:

- a) 50% de 18      b) 25% de 180      c) 10% de 390      d) 20% de 55  
e) 10% de 80      f) 50% de 68      g) 20% de 105      h) 25% de 84

*CALCULAR LA PARTE, CONOCIDOS EL PORCENTAJE Y EL TOTAL:*

19. A la excursión de fin de curso ha ido el 75% de los 348 alumnos del instituto. ¿Cuántos alumnos han ido a la excursión?

20. El 67% de los asistentes a un partido son seguidores del equipo local. Si asistieron 15000 personas, ¿cuántos asistentes no eran del equipo local?

*CALCULAR EL PORCENTAJE, CONOCIDOS EL TOTAL Y LA PARTE:*

21. Un hotel con 200 habitaciones tiene ocupadas 156. ¿Qué porcentaje de habitaciones están ocupadas? ¿Qué porcentaje de habitaciones están libres?

22. Tenía 30€ y me he gastado 18€. ¿Qué porcentaje del dinero me he gastado?

*CALCULAR EL TOTAL, CONOCIDOS EL PORCENTAJE Y LA PARTE:*

23. El 30% de los miembros de un gimnasio hacen yoga. Si ese porcentaje corresponde a 27 personas, ¿cuántos miembros tiene el gimnasio?

24. Un embalse está lleno hasta el 82% de su capacidad. Si aún admite  $72 \text{ hm}^3$ , ¿cuál es su capacidad?

### AUMENTOS PORCENTUALES:

Ejemplo: Las reservas de agua de un embalse han  **aumentado**  este año un 20% respecto a las que tenía el año pasado por estas mismas fechas, que eran de 60 millones de litros. ¿Cuáles son las reservas actuales?

- *Primera forma:*      Aumento = 20% de 60 = 12 millones de litros  
Reservas actuales:  $60 + 12 = 72$  millones de litros
- *Segunda forma:* Este año hay un  $100\% + 20\% = 120\%$ . Entonces: 120% de 60 = 72 millones de litros.

### DISMINUCIONES PORCENTUALES:

Ejemplo: Las reservas de agua de un embalse han  **disminuido**  este año un 20% respecto a las que tenía el año pasado por estas mismas fechas, que eran de 60 millones de litros. ¿Cuáles son las reservas actuales?

- *Primera forma:*      Disminución = 20% de 60 = 12 millones de litros  
Reservas actuales:  $60 - 12 = 48$  millones de litros
- *Segunda forma:* Este año hay un  $100\% - 20\% = 80\%$ . Entonces: 80% de 60 = 48 millones de litros.

25. Un billete de avión costaba el lunes 140€, pero el miércoles salía un 15% más caro. ¿Cuál era el precio del billete el miércoles?



26. Una tienda de ropa anuncia una rebaja del 15% en todos sus artículos. ¿En cuánto se queda un vestido que costaba 140€?

27. ¿A cuánto asciende una factura de 85€ después de cargarle el 21% de IVA?

28. El Ayuntamiento rebaja un 20% en las multas si se pagan de forma inmediata. ¿En cuánto se queda una multa de 75€ si se paga en el momento?

---- ... ---

29. Completa la siguiente tabla sabiendo que la proporcionalidad entre las magnitudes es directa

A	4	2		7	
B	20		60		100

¿Cuánto corresponde a 1?

30. Completa la siguiente tabla sabiendo que la proporcionalidad entre las magnitudes es inversa:

A	4	2		16	
B	20		16		100

¿Cuánto corresponde a 1?

31. Un empleado recibió la semana pasada 60€ por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por sólo 3 horas?

32. Un grifo que aporta un caudal de 5 litros por minuto llena un depósito en 12 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar el mismo depósito otro grifo que aporta solamente 3 litros por minuto?

33. Un grifo llena un cubo de 20 litros en 5 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar una garrafa de 12 litros?

34. Si con medio kilo de jamón salen cuatro bocadillos, ¿cuánto jamón necesito para 10 bocadillos?

35. Hay tres grifos iguales para llenar un depósito. Si abrimos uno, el depósito se llena en 12 minutos. ¿Cuánto tardará en llenarse si abrimos dos grifos? ¿Y si abrimos los tres?

36. Colocando 3 semillas en cada maceta, necesitamos 20 macetas para sembrar todas las semillas que tenemos. ¿Cuántas macetas necesitaríamos si colocásemos 4 semillas en cada una?

37. Una bomba de riego, que saca agua de un pozo, ha llenado un pilón de 15000 litros en hora y media. ¿Cuánto tardará otra bomba igual en llenar un depósito de 25000 litros?

38. Cuatro segadores cortan un campo de heno en tres horas y 20 minutos. ¿Cuánto tardará un solo segador? ¿Y cinco segadores?

39. Dos ciudades A y B, separadas 85 km en la realidad, están a 34 cm de distancia en un plano. ¿Cuál será la distancia real entre otras dos ciudades M y N separadas 12 cm en el plano?

40. Con un depósito de agua, se abastece una cuadra de 20 caballos durante 15 días. ¿Cuánto duraría el depósito si se vendieran 8 caballos de la cuadra?





- 41.** Dos socios montan un negocio aportando 20000€ y 15000€, respectivamente. Para compensar la diferencia, cada uno se compromete a trabajar un número de horas inversamente proporcional a la cantidad aportada. Si el primero dedica al negocio 3 horas al día, ¿cuántas horas al día debe dedicar el segundo?
- 42.** Un comerciante gana 3€ por cada 14€ en ventas. ¿Cuánto ganará si logra hacer unas ventas de 406€? ¿Y qué ventas ha realizado si ha ganado 102€?
- 43.** Para elaborar un bizcocho de 5 raciones son necesarios 250 gramos de harina, 200 g de azúcar, 3 huevos y 100 ml de leche. ¿Qué cantidades de cada ingrediente son necesarias para elaborar un bizcocho de 8 raciones? ¿De cuántas raciones será un bizcocho hecho con 350 g de harina si mantenemos las proporciones? ¿Y uno que lleva 9 huevos?
- 44.** Dos socios montan una empresa. El socio A puso 2 millones de euros y el socio B puso 5 millones. Al año han obtenido 28.000 € de beneficios. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
- 45.** Un 35% de los empleados de una fábrica trabaja en turno de mañana; otro 35%, en el de la tarde, y el resto lo hacen en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja en el turno de noche?
- 46.** El año pasado, en abril, llovió el 40% de los días. ¿Cuántos días de lluvia hubo en abril?
- 47.** Sólo en 12% de los 25 asistentes a una clase de baile son chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas son?
- 48.** En una clase se han apuntado 7 alumnos al equipo de baloncesto, es decir, el 25% del total. ¿Cuántos alumnos son en clase?
- 49.** En una residencia de mayores, se han vacunado contra la gripe 243 personas, lo que supone el 90% del total. ¿Cuántos no se han vacunado?
- 50.** En una granja hay 40 vacas y 12 de ellas han tenido este año un ternero. ¿Qué tanto por ciento han tenido un ternero este año?
- 51.** Para el cumpleaños de mi hermano han comprado dos docenas de pasteles y yo me he comido 6. ¿Qué porcentaje del total me he comido?
- 52.** Una televisión que costaba 450€ está rebajado un 15%. ¿Cuánto cuesta después de la rebaja?
- 53.** ¿A cuánto asciende el precio final de una lavadora de 300€ después de cargarle el 21% de IVA?
- 54.** Un agricultor estaba a punto de recoger una cosecha de melocotones estimada en 20000 kilos, pero después de una tormenta de granizo sólo ha podido aprovechar 4000 kilos. ¿Qué tanto por ciento de la cosecha ha perdido?
- 55.** Por un vestido que costaba 50€, Adela ha pagado, en las rebajas, 45€. ¿Qué tanto por ciento de rebaja tenía la falda?
- 56.** Una camiseta cuesta 21 € después de rebajarla un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?
- 57.** Tengo que pagar 352 € por un mueble en el que me incluyen el cobro de un 10% por transporte. ¿Cuál será el precio del mueble prescindiendo del transporte?