TEMA 9: CUERPOS GEOMÉTRICOS

CUERPOS GEOMETRICOS

En nuestro entorno observamos continuamente objetos de diversas formas: pelotas, botes, cajas, pirámides, etc. Todos estos objetos son *cuerpos geométricos*. A lo largo de todos los tiempos se han utilizado estos cuerpos en el arte y en la arquitectura.

Cuerpos geométricos son porciones de espacio limitadas por superficies planas/curvas

Clasificamos, en el siguiente esquema, los cuerpos geométricos:

CUERPOS GEOMÉTRICOS

- **POLIEDROS (cuerpos con caras Planas)**
  - **POLIEDROS REGULARES**
  - **PRISMAS**
  - **PIRÁMIDES**
- **CUERPOS REDONDOS (cuerpos con caras curvas)**
  - **CILINDROS**
  - **CONOS**
  - **ESFERAS**
  - **C. ESFERICOS**

POLIEDROS

Un ***poliedro*** es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.

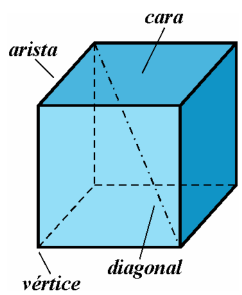
Los principales elementos de un poliedro son:

Caras o polígonos que lo limitan.

Aristas o lados de las caras.

Vértices o puntos de corte de las aristas.

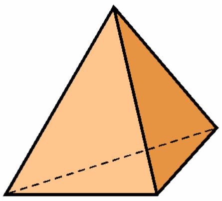
Diagonales o segmentos que unen dos vértices de distintas caras.



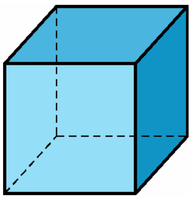
Poliedros regulares

Los ***poliedros regulares*** son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras.

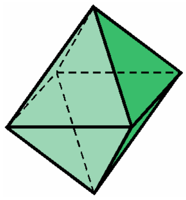
Sólo existen cinco poliedros regulares. A continuación te mostramos cada uno de ellos con su definición:



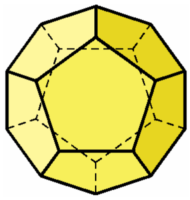
Tetraedro
4 caras triángulos equiláteros



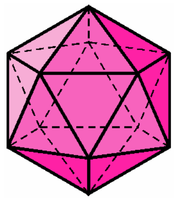
Hexaedro o cubo
6 caras cuadrados



Octaedro
8 caras triángulos equiláteros



Dodecaedro
12 caras pentágonos



Icosaedro
20 caras triángulos equiláteros

Prismas y pirámides

Los ***prismas*** son poliedros cuyas bases, paralelas entre sí, son dos polígonos iguales y sus caras laterales son paralelogramos.

Un elemento característico de los primas es la ***altura*** o segmento perpendicular a sus bases.

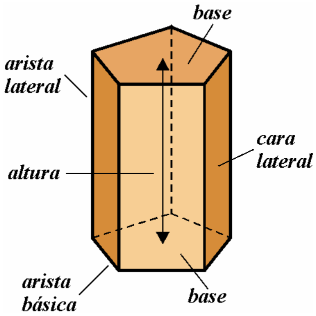
Podemos clasificar los prismas de la siguiente manera:

Según sean los polígonos de sus bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

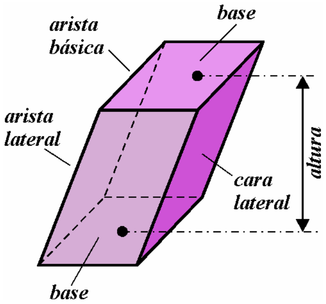
Rectos y oblicuos, según que las aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a las bases.

Regulares o irregulares. Son regulares aquellos prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.

Paralelepípedos son prismas cuyas bases son paralelogramos, luego sus seis caras son paralelogramos. Los paralelepípedos rectos se denominan ***ortoedros,*** y son el *ortoedro* (o *paralelepípedo rectángulo*) y el *cubo* (o *hexaedro*).

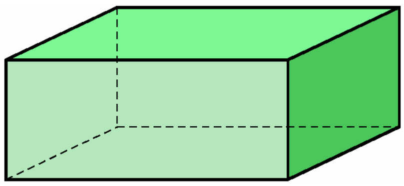


Prisma pentagonal recto (regular)
Base: pentágono regular

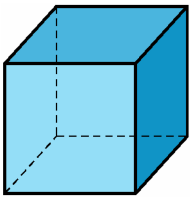


Prisma cuadrangular oblicuo
Base:cuadrado

Paralelepípedos:



Ortoedro o paralelepípedo rectángulo
Todas sus caras son rectángulos



Cubo o exaedro
Todas sus caras son cuadrados

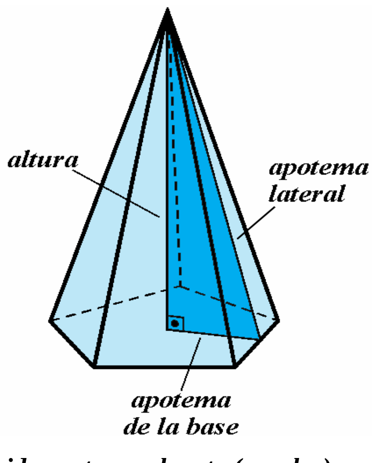
Las ***pirámides*** son poliedros que tienen por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un ***vértice.***

Los elementos más característicos de la pirámide, además de los generales de los poliedros, son:

Altura, h, o distancia del vértice al plano que contiene la base.

Apotema lateral, a_l, es la altura de sus caras laterales.

Apotema de la base, a_b, es la apotema de la base.



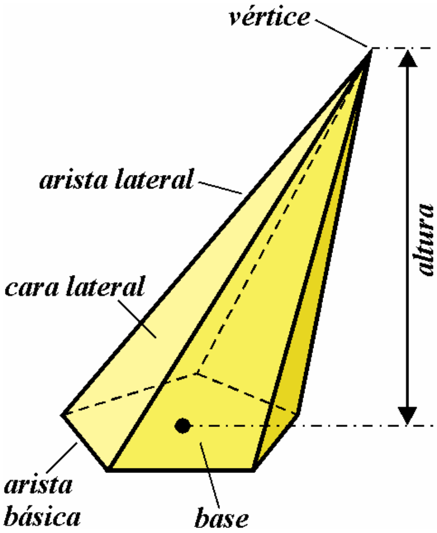
Pirámide pentagonal recta (regular)

Podemos clasificar las pirámides de la siguiente manera:

Por los polígonos de sus bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

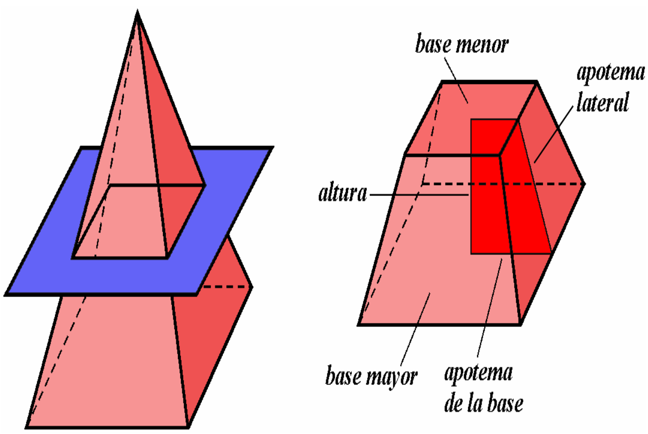
Rectas y oblicuas. Las pirámides rectas son aquellas que tienen por caras laterales triángulos isósceles. Si alguna cara lateral es un triángulo escaleno, la pirámide es oblicua.

Regulares o irregulares. Son regulares aquellas pirámides rectas que tienen por base un polígono regular; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.



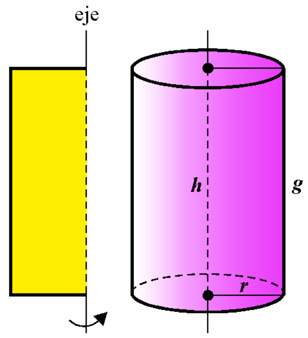
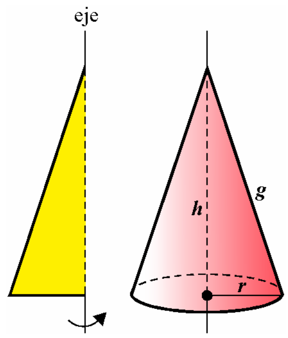
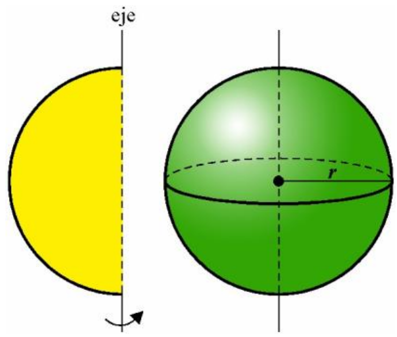
Pirámide pentagonal oblicua

El ***tronco de pirámide*** es la parte de pirámide comprendida entre la base y la sección producida por un plano paralelo a la base. La altura del tronco es la distancia entre las bases y la apotema es la altura de la cara lateral (trapecio)



CUERPOS REDONDOS: CILINDRO, CONO Y ESFERA

Los cuerpos redondos de revolución se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Los tres cuerpos de revolución más sencillos son el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

El ***cilindro*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. 	El ***cono*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. 	La ***esfera*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro. 

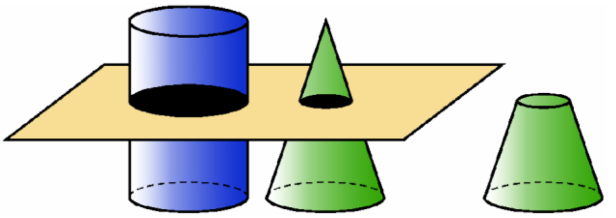
Detallamos a continuación los elementos más importantes de estos cuerpos.

Cilindro	*Cono*	*Esfera*
***Altura* (*h*)** es el segmento que une el centro de las dos bases. Es perpendicular a ambas bases. ***Radio* (*r*)** es el radio de cada uno de los círculos que forman sus bases. ***Generatriz* (*g*)** es el segmento que genera el cilindro. Su medida coincide con la de la altura.	***Altura* (*h*)** es el segmento que une el vértice y el centro de la base. Es perpendicular a la base. ***Radio* (*r*)** es el radio del círculo que forma su base. ***Generatriz* (*g*)** es el segmento que genera el cono.	***Radio* (*r*)** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie que limita la esfera. ***Diámetro* (*d*)** es el segmento que une dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro.

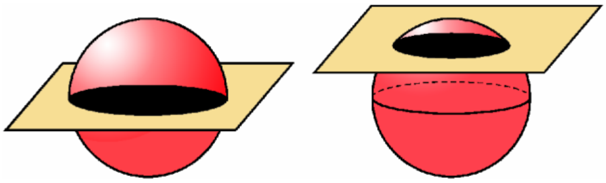
Secciones de los cuerpos redondos

Cuando se corta un cilindro o un cono por un plano paralelo a la base, la sección que se obtiene en cada caso es un círculo. En el caso del cilindro, el círculo que se obtiene es igual que el de la base. Al cortar un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un cono menor y un ***tronco de cono*** que es la parte de cono comprendida entre la base y la sección producida por el plano.

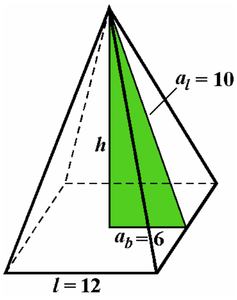
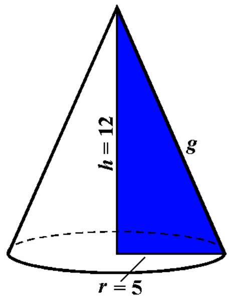
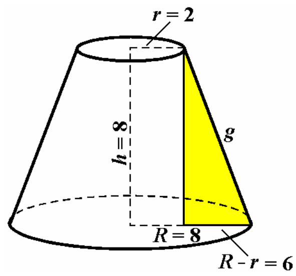
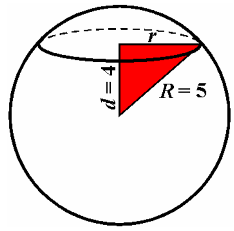
Al cortar una esfera por un plano se obtiene siempre un círculo. Si el plano pasa por el centro de la esfera se obtiene un ***círculo máximo*** (cuyo radio es el radio de la esfera). Si el plano no pasa por el centro se obtiene un ***círculo menor.***



Secciones circulares *Tronco de cono*

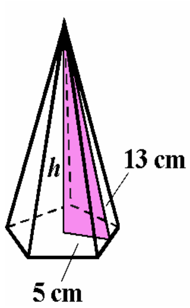


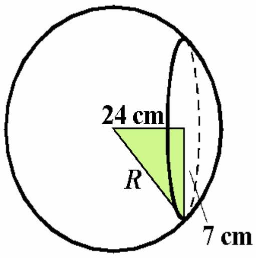
Círculo máximo *Círculo menor*

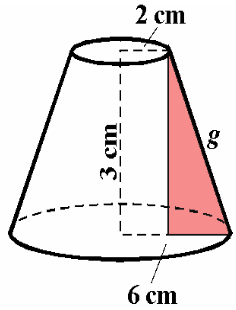
Cálculo de *h*	Cálculo de *g*	Cálculo de *g*	Cálculo de *r*
			

EJERCICIOS

1. En los cuerpos siguientes, calcula la altura de la pirámide, el radio de la esfera y la generatriz del tronco de cono.







ÁREAS DE POLIEDROS

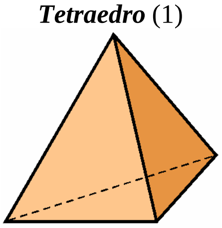
> El ***área de un poliedro*** se obtiene sumando las áreas de todas las caras que lo forman. Para las pirámides y prismas se pueden obtener fórmulas sencillas que permitan calcular el área.

Áreas de poliedros regulares

Hallemos las áreas de los poliedros regulares en función de la arista "a". Para aquellos cuyas caras son triángulos equiláteros (tetraedro, octaedro e icosaedro)

Recordaremos que el área de un triángulo equilátero de lado "a" es: $A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

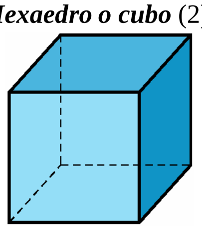
Tetraedro (1)



$A = 4 \cdot A_{cara} = 4\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{A = a^2\sqrt{3}}$

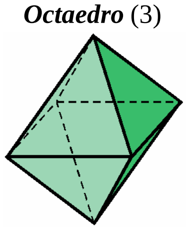
Hexaedro o cubo (2)



$A = 6 \cdot A_{cara} = 6a^2$

$\boxed{A = 6a^2}$

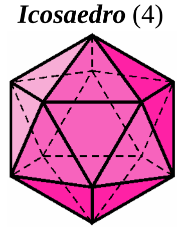
Octaedro (3)



$A = 8\, A_{cara} = 8\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{A = 2a^2\sqrt{3}}$

Icosaedro (4)



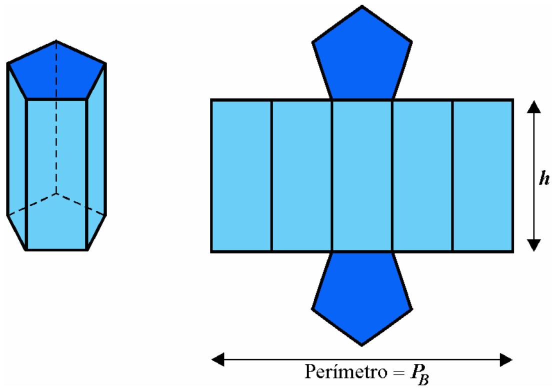
$A = 20\, A_{cara} = 20\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{A = 5a^2\sqrt{3}}$

Áreas de prismas y pirámides rectas

El desarrollo de un ***prisma recto*** es un rectángulo (formado por las caras laterales) y los dos polígonos de las bases. Uno de los lados del rectángulo es el perímetro del polígono de la base (P_B) y el otro lado es la altura del prisma.

Prisma recto y su desarrollo



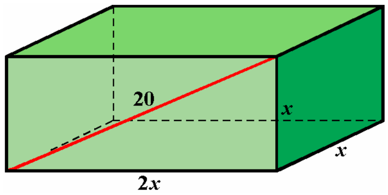
El área lateral es igual al perímetro de la base por la altura:

$$\boxed{A_L = P_B \; h}$$

El área total es igual al área lateral más el área de las dos bases:

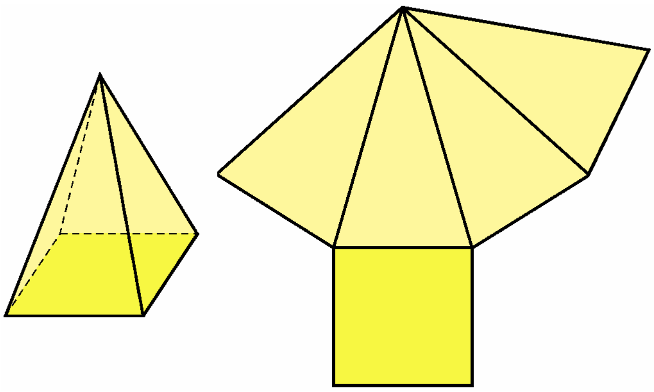
$$\boxed{A_T = A_L + 2 \; A_B}$$

Ejercicio: Una caja de galletas con forma de paralelepípedo mide lo mismo de largo que de alto y su ancho es doble que el largo. Si la diagonal de una de sus caras más grandes mide 20 cm, encuentra la cantidad de cartón necesaria para su construcción.



El desarrollo de una ***pirámide recta*** lo forman varios triángulos isósceles (caras laterales) y el polígono de la base.

Pirámide recta y su desarrollo



El área lateral se obtiene sumando el área de todas las caras laterales:

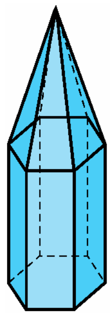
$$\boxed{A_L = \textit{suma de las áreas de las caras laterales}}$$

El área total se obtiene sumando al área lateral el área de la base:

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

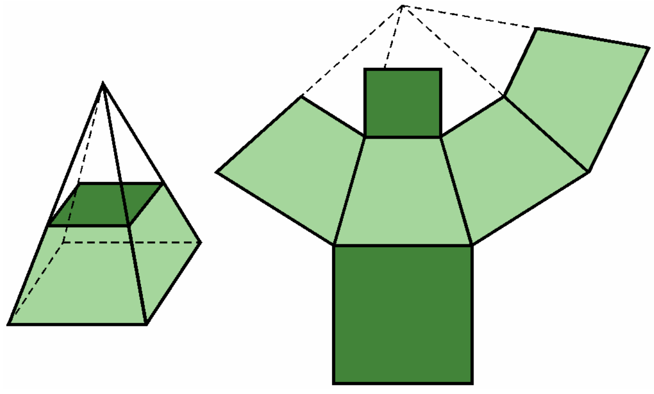
-

Ejercicio: La siguiente figura representa la torre de la iglesia de un pueblo. Sus dimensiones son las siguientes: la longitud de la arista básica del prisma hexagonal regular es de 6 m, la de su altura es de 9'7 m y la de la arista lateral de la pirámide hexagonal regular es de 13 m. Con estos datos, halla la superficie externa de la torre.



El desarrollo de un ***tronco de pirámide*** son varios trapecios y los dos polígonos que forman las bases. El área de una cara lateral es el área de un trapecio y el área lateral la suma de las áreas de todas las caras laterales.

Tronco de pirámide y su desarrollo



El área lateral se obtiene sumando el área de todas las caras laterales:

$\boxed{A_L = \textit{suma de las áreas de las caras laterales}}$

El área total es igual al área lateral más la suma de las áreas de la base mayor y de la base menor:

$\boxed{A_T = A_L + A_B + A_b}$

EJERCICIOS

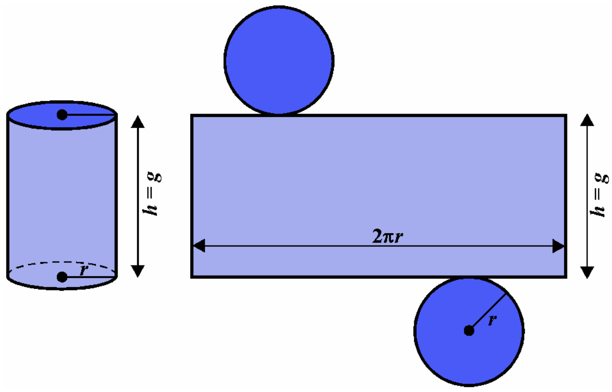
1 Calcula el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista básica y altura miden ambas 8 cm.

2. Calcula el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 6 cm y 4 cm de altura.

ÁREAS DE CILINDROS Y CONOS

El desarrollo de un ***cilindro*** es un rectángulo y dos círculos. El rectángulo tiene por base la longitud de la circunferencia y por altura la generatriz.

Cilindro y su desarrollo



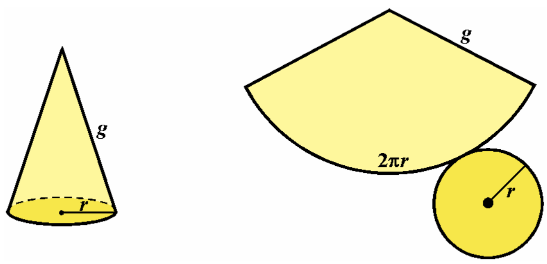
El área lateral es, por tanto: $\boxed{A_L = 2\pi rh}$

El área total es igual al área lateral más la suma de las áreas de los dos círculos:

$$\boxed{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

El desarrollo de un ***cono*** es un sector circular y un círculo. El arco del sector circular tiene de longitud $2\pi r$, porque es la longitud de la circunferencia de la base.

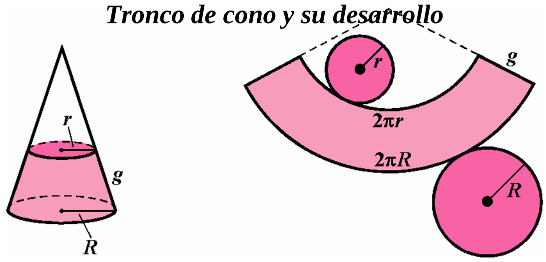
Cono y su desarrollo



$$A_T = \pi rg + \pi r^2$$

El desarrollo de un ***tronco de cono*** es un trapecio circular y dos círculos. El trapecio circular tiene por bases las longitudes de las circunferencias.

Tronco de cono y su desarrollo



El área lateral es: $A_L = \pi g(R + r)$

El área total es igual al área lateral más el área de los dos círculos:

$$\boxed{A_T = \pi g(R + r) + \pi r^2 + \pi R^2}$$

EJERCICIOS

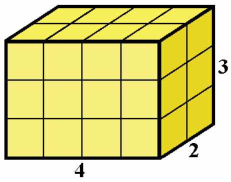
1. Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura.

2. Calcula el área lateral y el área total de un cono de radio 7 cm y 24 cm de altura.

3. Calcula el área lateral y el área total de un tronco de cono cuyos radios miden 8 y 2 cm, respectivamente, y tiene una altura de 8 cm.

PRINCIPIO DE CAVALIERI. VOLUMEN DE PRISMAS Y CILINDROS

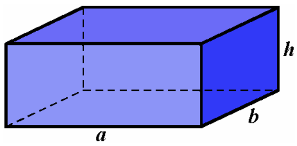
Volumen del ortoedro



El volumen de un cuerpo expresa el número de veces que contiene al cubo unidad. Así decimos que el volumen del ortoedro del margen es:

$V = 4 \, . \, 2 \, . \, 3 = 24 \text{ u}^3$ (unidades cúbicas)

El volumen del ortoedro se obtiene multiplicando sus tres dimensiones:



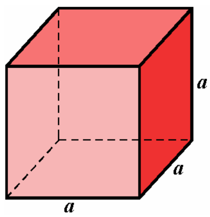
Volumen del ortoedro= ancho . Largo . alto

Como el ancho por el largo es el área de la base (A_B), resulta:

Volumen del ortoedro= área de la base . altura= $A_B \, . \, h$

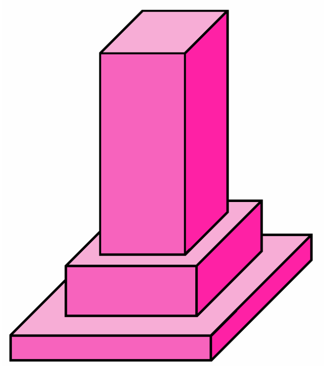
En el caso particular del cubo, sus tres dimensiones son iguales, con lo que:

Volumen del cubo= $a \, . \, a \, . \, a = a^3$



$\boxed{V_{cubo} = a^3}$

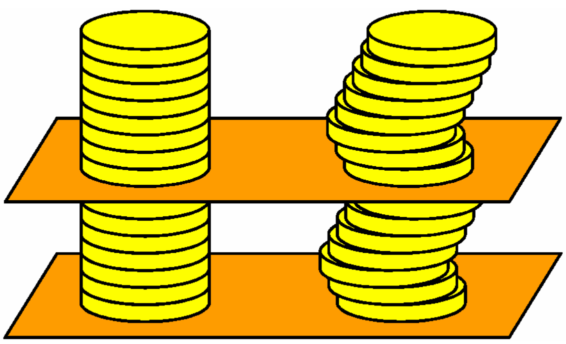
Ejercicio: Calcula el volumen de piedra que encierra el monolito de la figura cuyas piezas tienen bases cuadradas de 40, 30 y 20 dm de lado, respectivamente, y sus alturas son 5, 10 y 50 dm.

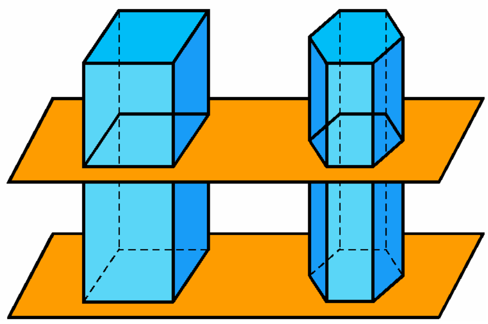


Principio de Cavalieri

En la siguiente figura se observan dos montones de fichas que tienen el mismo área de la base (el área de una ficha) y la misma altura, pero tienen forma diferente. En la figura de la derecha hay dos prismas que tienen el mismo área de la base y la misma altura.

En los dos casos (fichas y prismas), las secciones que resultan al cortar por planos paralelos a la base son iguales y, por tanto, tienen igual área.





Las tres condiciones que cumplen los dos montones de fichas y los dos prismas (tener la base del mismo área tener la misma altura y tener el mismo área las secciones producidas por planos paralelos a la base) permiten afirmar que los dos montones de fichas y los dos prismas tienen el mismo volumen.

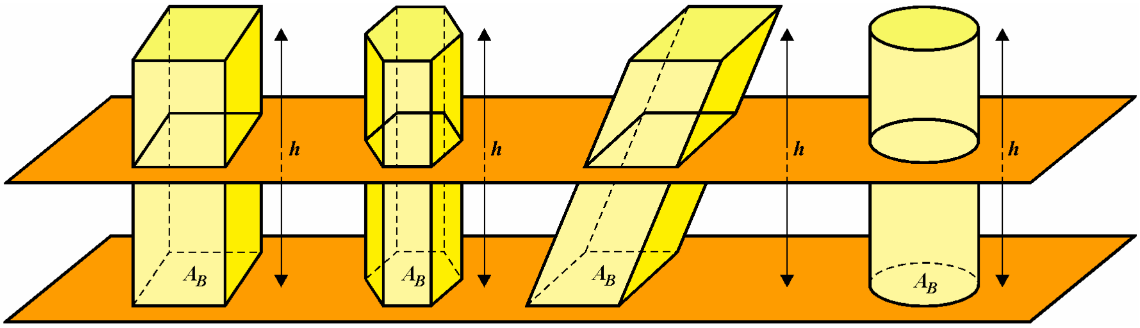
Principio de Cavalieri

Si dos o más cuerpos de igual área de la base y la misma altura se cortan por planos paralelos a la base, y las secciones producidas por cada plano en esos cuerpos tienen el mismo área, entonces esos cuerpos tienen el mismo volumen.

Volumen de prismas y cilindros

Vamos a calcular el volumen del prisma y el del cilindro a partir del volumen del ortoedro que ya conocemos. Para ello, consideremos un ortoedro en el que el área de la base es A_B y la altura es h, luego su volumen es $V = A_B \quad h$.

Supongamos ahora que los dos prismas de la figura y el cilindro tienen la misma área de la base (A_B) y la misma al- tura (h) que el ortoedro.



Como los prismas y el cilindro tienen las bases de igual área y tienen la misma altura, las secciones producidas por un plano paralelo a las bases a la misma altura tienen igual área. Por el principio de Cavalieri resulta que los prismas y el cilindro tienen el mismo volumen que el ortoedro.

Como el volumen del ortoedro es igual al área de la base (A_B) por la altura (h) se tiene:

V_{prisma} = área de la base . altura= $A_B \cdot h$ $V_{cilindro}$ = área de la base .altura= $A_B \cdot h$

Para el cilindro de radio r y altura h, se tiene en particular: $V_{cilindro} = A_B \cdot h = \pi r^2 h$

El volumen de un prisma o de un cilindro es igual al área de la base por la altura:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_{prisma} = A_B \cdot h \\ V_{cilindro} = A_B \cdot h = \pi r^2 h \end{array}}$$

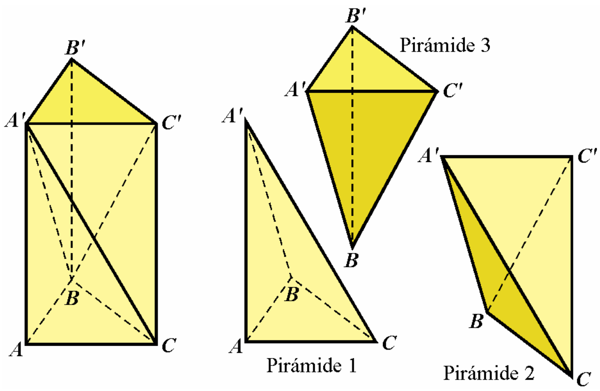
EJERCICIOS

1. Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 8 cm de altura y arista básica 5 cm.

VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y DE CONOS

Volumen de pirámides

En la siguiente figura se observa la descomposición de un prisma triangular en tres pirámides triangulares.

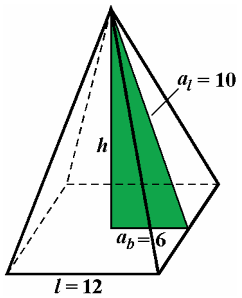


Las pirámides 1, 2 y 3 que resultan de la descomposición tienen el mismo volumen. Por lo tanto, el volumen de cada una de estas pirámides es el mismo y es la tercera parte del volumen del prisma. En consecuencia, el volumen de una pirámide triangular es igual es igual a un tercio del volumen del prisma de la misma base y altura

Este resultado se puede generalizar a cualquier pirámide recta u oblicua. Así, deducimos que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura.

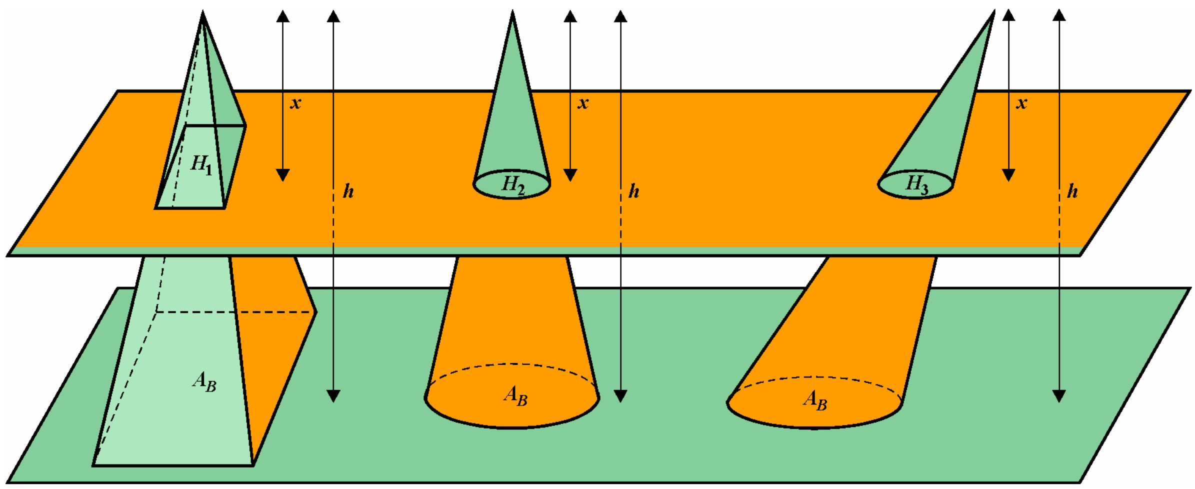
$$\boxed{V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \; h}$$

Ejercicio: Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular de 12 cm de arista básica y cuya apotema lateral mide 10 cm.



Volumen de conos

La pirámide y los conos de la siguiente ilustración tienen la misma altura (h) y sus bases tienen la misma área (A_B).



Llamemos H_1, H_2, H_3 a las áreas de las secciones producidas por un plano trazado a una altura x del vértice. Como las secciones, en cada caso, son semejantes a la base, se tiene que la razón de las áreas de cada sección a la base correspondiente es igual al cuadrado de la razón de semejanza y por lo tanto las áreas de las secciones producidas por el plano son todas iguales.

Aplicando el principio de Cavalieri, resulta:

Todas las pirámides y conos con el mismo área de la base e igual altura tienen el mismo volumen.

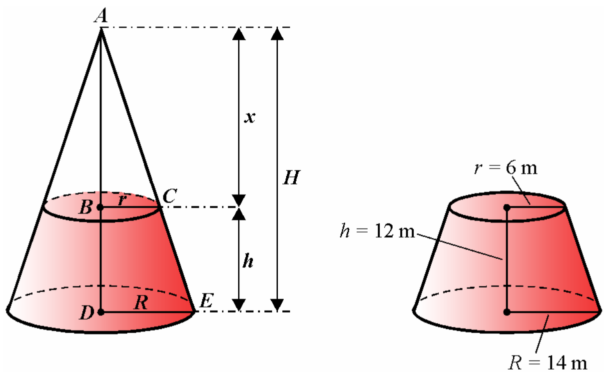
En consecuencia, el volumen de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.

Para un cono de radio de la base *r* y altura *h:*

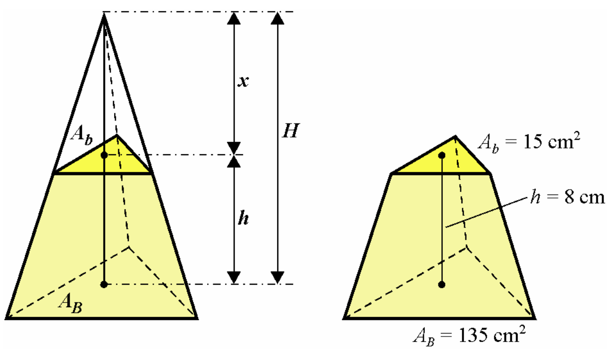
$$V_{cono} = \frac{1}{3} A_B\ h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono

Para calcular el volumen de los troncos de pirámides y de conos restamos el volumen del cono (pirámide) grande el del pequeño, utilizando criterios de semejanza:



$$ABC \approx ADE \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{r}{R}$$



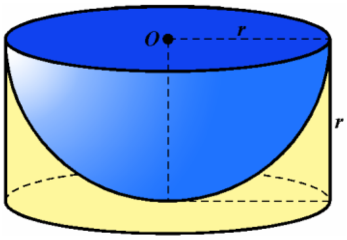
$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{x}{x+h}\right)^2$$

EJERCICIOS

1. Calcula el volumen de un tronco de cono de altura 6 cm, cuyas bases tienen 4 y 2 cm, respectivamente, de radio.
2. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuyas bases son triángulos equiláteros de lados 8 y 4 cm, respectivamente, y tiene una altura de 10 cm.

VOLUMEN DE LA ESFERA Y ÁREA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

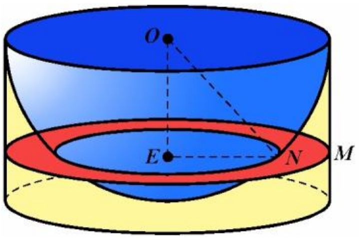
El volumen de la *esfera se puede obtener a partir de la aplicación del* principio de Cavalieri. Para ello, consideremos una semiesfera de radio *r* inscrita en un cilindro de altura y radio también *r*.

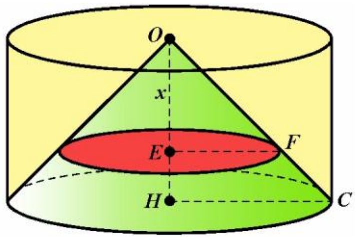


El volumen de la semiesfera lo obtendríamos restando al volumen del cilindro el volumen del complemento (espacio entre el cilindro y la semiesfera):

$$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{complemento}}$$

Mediante el principio de Cavalieri se demuestra que el volumen del complemento es igual al volumen del cono de vértice *O* y base la del cilindro.





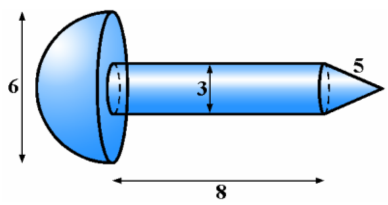
Deduciéndose que: $V = \frac{4}{3}\pi \bullet r^3$

Mediante procedimientos que no es apropiado estudiar en este momento, también se deduce que el área de la superficie esférica viene dada por:

$$S = 4\pi \bullet r^2$$

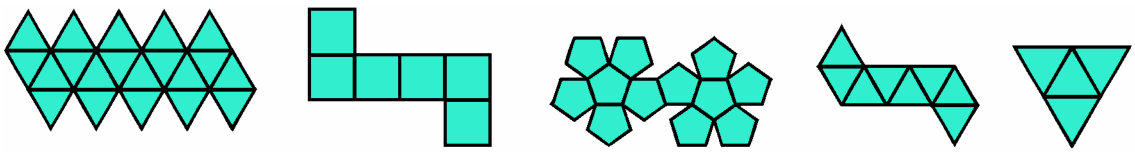
EJERCICIOS

1. Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo, cuyas medidas están dadas en centímetros.



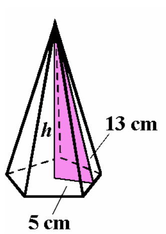
EJERCICIOS PROPUESTOS

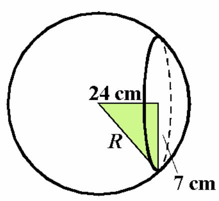
1. Indica a qué poliedro regular corresponde cada desarrollo.

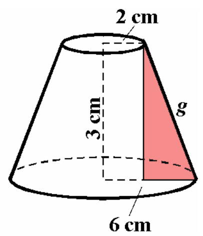


2. Calcula el valor de la diagonal de un ortoedro de dimensiones 8 x 6 x 4 cm. Halla también el valor de la diagonal de un cubo de arista 4 cm.

3. En los cuerpos siguientes, calcula la altura de la pirámide, el radio de la esfera y la generatriz del tronco de cono.







S:*h* = 12 cm **S:*R* = 25 cm** **S:*g* = 5cm**

4. Calcula el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista básica y altura miden ambas 8 cm.

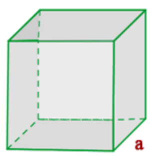
5. Calcula el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 6 cm y 4 cm de altura.

6. Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura.

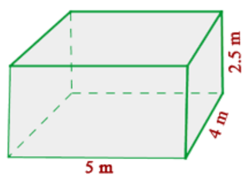
7. Calcula el área lateral y el área total de un cono de radio 7 cm y 24 cm de altura.

8. Calcula el área lateral y el área total de un tronco de cono cuyos radios miden 8 y 2 cm, respectivamente, y tiene una altura de 8 cm.

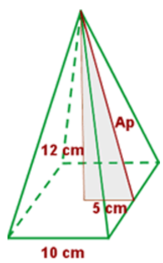
9. Calcula el área total de un cubo de arista 5 cm.



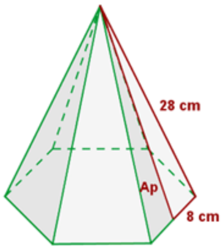
10. Calcula el área lateral y total de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.



11. Calcula el área lateral, total de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.

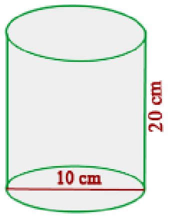


12. Calcula el área lateral, total y el volumen de una pirámide hexagonal de 16 cm de arista básica y 28 cm de arista lateral.

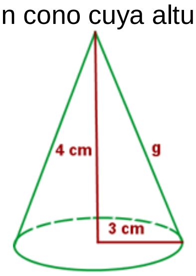


13. Enrollando una hoja de papel de 20 x 30 cm se forma un cilindro de 20 cm de altura. Se le añaden las dos bases circulares. Calcula la superficie total.

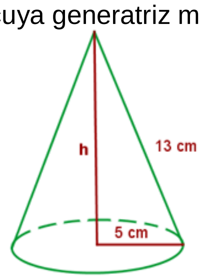
14. Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.



15. Calcula la generatriz y el área total de un cono cuya altura mide 4 cm y el radio de la base es de 3 cm.



16. Calcula la altura y el área total de un cono cuya generatriz mide 13 cm y el radio de la base es de 5 cm.



17. Calcula el área de una esfera de diámetro 20 cm.

18. Un depósito de acero para contener gases está formado un cilindro de 4 m de diámetro y 10 m de altura. La tapa superior ha sido sustituida por una semiesfera. Calcula su área total.

19. Un cubo tiene 1.350 cm^2 de área total. Calcula su volumen.

20. Un cubo tiene 125 cm^3 de volumen. Calcula la longitud de su arista.

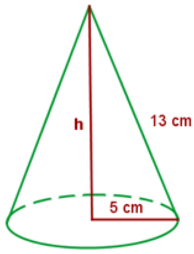
21. Calcula el volumen en cm^3 de un ortoedro de 0’5 m de largo, 2 dm de fondo y 2.300 mm de alto.

22. Una caja de zapatos tiene 28 cm de largo, 12 de ancho y 10 de alto. Calcula su volumen en dm^3.

23. Calcula el volumen de un prisma de 12 cm de altura y cuya base es un cuadrado de 7 cm de lado.

24. Calcula el volumen de un cilindro de 18 cm de diámetro y 30 cm de altura.

25. Calcula el volumen de un cono cuya generatriz mide 13 cm y el radio de la base es de 5 cm.



26. Calcula el volumen en dm^3 de una esfera de 15 cm de radio.

27. En todas las siguientes figuras, el ancho y fondo del cubo y todos los diámetros miden 10 cm. Todas las alturas miden también 10 cm. Calcula los volúmenes.